

О МАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ЧАСТИЦЫ С ПОЛОСТЬЮ

Сбойчаков А.О. * ¹

¹ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 20.11.2023

Одобрена после рецензирования 20.12.2023

Принята к публикации 28.12.2023

Аннотация

В работе исследуются композитные материалы, состоящие из ферромагнитных частиц, помещенных в немагнитную диэлектрическую среду. Предполагается, что ферромагнитные частицы не являются сплошными, а содержат в себе пустотелую полость, размеры которой могут быть порядка размера самой частицы. В работе частицы моделируются шарами с вырезанной сердцевинкой. Целью работы является выяснить возможное распределение намагниченности внутри такой частицы, оптимальное с точки зрения собственной магнитной энергии. С этой целью рассматриваются три возможные конфигурации: однородно намагниченное состояние, состояние с двумя доменами, а также состояние, в котором намагниченность неоднородна и закручена в определенной плоскости. В работе показано, что при определенных предположениях относительно характера магнитной анизотропии третья конфигурация наиболее оптимальна из трех рассмотренных, если размеры частицы (ее радиус и толщина ферромагнитного слоя) много больше обменной длины.

Ключевые слова: магнитные композитные материалы, магнитостатика, магнитная анизотропия, доменная структура

EDN DVTKNN

doi:[10.24412/2949-0553-2023-57-15-22](https://doi.org/10.24412/2949-0553-2023-57-15-22)

1. Введение

Композитные магнитные материалы интересны для множества технических приложений. Геометрия таких систем чрезвычайно разнообразна. Это могут быть, например, многослойные пленки, состоящие из чередующихся ферромагнитных и немагнитных слоев. Широко используются также материалы, в которых несприкасающиеся ферромагнитные области распределены внутри немагнитной матрицы. Размеры и форма ферромагнитных частиц зависят от технологии изготовления композитного материала и могут меняться в широких пределах. Во многих случаях форма ферромагнитных включений является достаточно изотропной, и при моделировании ее можно считать сферической. В данной работе рассматриваются именно такие материалы. Однако особенностью рассматриваемых частиц является то, что они содержат в себе пустотелую полость. Такая геометрия очевидным образом будет влиять на магнитные свойства частиц. Целью данной работы является попытка выяснить возможное распределение намагниченности внутри частицы, оптимальное с точки зрения ее магнитной энергии.

Мы будем моделировать ферромагнитные частицы шарами с полостью. Внешний радиус шара есть R_2 , а внутренний – R_1 , при этом $d = R_2 - R_1$ есть толщина ферромагнитного слоя в частице. Сферы с радиусами R_1 и R_2 центрированы. Расчет оптимального с точки зрения энергии распределения намагниченности внутри такой частицы является сложной задачей. Поэтому в работе мы ограничимся расчетом магнитной энергии для трех заданных конфигураций. Первые две конфигурации достаточно просты. Они соответствуют однородно намагниченной однодоменной частице, а также двухдоменной частице. Цель расчета – показать, при каких размерах частицы образование магнитных доменов в ней будет более выгодно по сравнению с однодоменной частицей. Кроме того, мы рассмотрим конфигурацию, в которой намагниченность неоднородна, но копланарна, при этом в каждом разрезе частицы плоскостью,

* Автор, ответственный за переписку: Артем Олегович Сбойчаков, sboycha@mail.ru

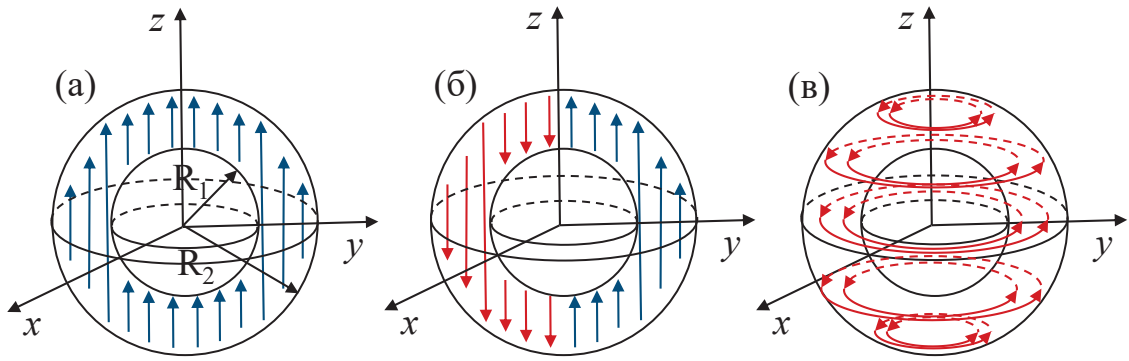


Рисунок 1 – Ферромагнитная частица с полостью. Границы ферромагнетика есть две центрированные сферы с радиусами R_1 и R_2 . Центр сфер выбран в качестве начала координат. Панели (а), (б) и (в) показывают распределение намагниченности внутри частицы для трех выбранных магнитных конфигураций. Конфигурации (а) и (б) соответствуют одно- и двухдоменной частицам соответственно. На панелях (а) и (б) показаны направления векторов намагниченности в плоскости yz , проходящей через начало координат. В третьей конфигурации намагниченность неколлинеарна, вектора намагниченности лежат в плоскости xy . В каждом разрезе частицы плоскостью, параллельной плоскости xy , вектора намагниченности образуют систему кругов, так как это схематически показано на панели (в).

в которой находятся вектора намагниченности частицы, последние будут направлены по касательной к границам разреза, которые представляют собой круги. Последняя конфигурация выбрана по той причине, что если считать толщину ферромагнитного слоя d малой по сравнению с радиусом R_2 , то частицу можно мысленно представить как свернутую в сферу ферромагнитную пленку. Если считать, что такая “свернутая пленка” обладает одноосной магнитной анизотропией, то такая магнитная конфигурация в частице будет оптимальна с точки зрения магнитной анизотропии. Кроме того, как мы увидим ниже, магнитостатическая энергия такой конфигурации также минимальна. Геометрия частицы, а также распределение намагниченности для всех трех конфигураций схематически показаны на рисунке 1. Задача данной работы – рассчитать полную магнитную энергию частицы для трех различных конфигураций намагниченности и определить, какая из них является более предпочтительной при тех или иных размерах частицы. Надо отметить, что полная энергия системы таких частиц включает в себя также энергию взаимодействия между ними. Взаимодействие между частицами, очевидно, будет влиять на распределение намагниченности внутри них. Мы, однако, будем считать взаимодействие достаточно слабым, так что энергия системы будет определяться в основном собственной энергией частиц.

2. Магнитная энергия однодоменной сферической частицы с полостью

Полная энергия ферромагнитной частицы состоит из энергии обменного взаимодействия, U_{ex} , магнитостатической энергии, U_m , энергии магнитной анизотропии, U_a , и энергии доменных стенок, U_{dw} . Для однодоменной частицы энергия обменного взаимодействия и энергия доменных стенок, очевидно, равны нулю. Рассчитаем сначала магнитостатическую энергию однодоменной частицы с полостью. Введем сферические координаты (r, θ, φ) с началом координат, расположенным в центре частицы, а ось z направим вдоль вектора намагниченности. Распределение намагниченности тогда есть $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M_s \mathbf{e}_z \Theta(r - R_1) \Theta(R_2 - r)$, где M_s – намагниченность насыщения, а \mathbf{e}_z – единичный вектор, направленный вдоль оси z . При этом будем иметь

$$\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}) = -M_s \cos \theta [\delta(r - R_2) - \delta(r - R_1)]. \quad (1)$$

Потенциал ψ магнитного поля $\mathbf{H} = -\nabla \psi$, создаваемый “магнитными зарядами” на границах частицы, имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = M_s \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \cos \theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \left[\frac{R_2^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2(\theta', \varphi')|} - \frac{R_1^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(\theta', \varphi')|} \right], \quad (2)$$

где $\mathbf{r}_{1,2}(\theta', \varphi') = R_{1,2} \{\sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta'\}$. Магнитостатическая энергия однодоменной частицы равна [1]

$$U_m^0 = -\frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{M} \mathbf{H} = -\frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{M} \psi = \frac{1}{2} M_s^2 [(R_2^3 + R_1^3) f_0(1) - 2R_1^2 R_2 f_0(R_1/R_2)], \quad (3)$$

где

$$f_0(\tau) = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \cos \theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 - 2\tau[\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')]}}, \quad (4)$$

Четверной интеграл в формуле (4) можно взять аналитически. Для этого воспользуемся разложением подынтегральной функции в ряд по полиномам Лежандра $P_l(x)$ [2]

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 - 2\tau \cos \gamma}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \gamma) \tau^l, \quad |\tau| < 1. \quad (5)$$

Используя обозначение $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$, можно также написать разложение [2]

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi'), \quad Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (6)$$

где $P_l^m(x)$ – присоединенные полиномы Лежандра. Подставляя формулы (5) и (6) в уравнение (4), используя условие ортогональности полиномов Лежандра, а также тот факт, что $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$, легко показать, что при интегрировании элементов получившегося ряда выживают только слагаемые с $l = 1$ и $m = 0$. В результате получим

$$f_0(\tau) = \frac{16\pi^2}{9} \tau. \quad (7)$$

Используя это выражение, получим, что магнитостатическая энергия однодоменной частицы равна

$$U_m^0 = \frac{8\pi^2 M_s^2}{9} (R_2^3 - R_1^3) = \frac{2\pi}{3} M_s^2 V, \quad (8)$$

где V – объем ферромагнитной области. Если полость отсутствует, $R_1 = 0$, то это выражение, как и должно быть, совпадает с энергией однородно намагниченного шара [1]. В случае когда толщина ферромагнитной области мала, $d = R_2 - R_1 \ll R_2$, получим

$$U_m^0 \cong \frac{8\pi^2}{3} M_s^2 R_2^2 d. \quad (9)$$

Помимо магнитостатической энергии, в полную энергию частицы также входит энергия магнитной анизотропии. Мы будем считать, что ферромагнетик, из которого сделана частица, обладает одноосной магнитной анизотропией. Тогда энергию магнитной анизотропии можно записать в виде [1]

$$U_a = -\beta \sum_{ij} \int d^3 \mathbf{r} M^i N_{ij} M^j, \quad (10)$$

где M^i ($i = x, y, z$) – компоненты векторов намагниченности, N_{ij} – тензор магнитной анизотропии, а $\beta = H_a/M_s$ (H_a – поле анизотропии). Компоненты тензора намагниченности N_{ij} , вообще говоря, есть функции координат, т.е. ось магнитной анизотропии не обязана иметь одно и то же направление в пространстве для всех точек частицы. В работе мы рассмотрим два частных случая. В первом случае мы будем считать, что компоненты тензора намагниченности N_{ij} не зависят от координат. Выбирая ось z в качестве оси анизотропии, тогда получим $N_{zz} = 1$, а остальные компоненты равны нулю. Энергия магнитной анизотропии будет минимальна, если намагниченность частицы будет направлена по или против оси z . При этом будем иметь

$$U_a = -\beta M_s^2 V. \quad (11)$$

Во втором случае компоненты тензора намагниченности N_{ij} зависят от координат. Мы будем считать, что оси анизотропии лежат в одной плоскости. Для дальнейших расчетов нам будет удобно считать эту плоскость плоскостью xy . Это, однако, не до конца фиксирует вид тензора N_{ij} . В работе мы будем считать, что в каждой точке ось анизотропии направлена по касательной к границам разреза частицы плоскостью, параллельной плоскости xy . Для такой конфигурации тензор намагниченности можно записать в матричном виде как

$$\hat{N}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Энергия магнитной анизотропии, очевидно, будет минимальна, если магнитный момент частицы лежит в плоскости xy . Направление магнитного момента задается полярным углом φ_0 , т.е., $\mathbf{M} = M_s \{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0, 0\}$. Подставляя это выражение, а также формулу (12) для тензора магнитной анизотропии в формулу (10), получим

$$U_a = -\frac{1}{2}\beta M_s^2 V. \quad (13)$$

Мы видим, что U_a оказывается не зависящей от φ_0 . При этом энергия анизотропии оказывается в два раза больше, чем для первого случая. Отметим, что отличие друг от друга рассмотренных здесь двух случаев заключается не только в энергии анизотропии, но и в отклике на внешнее переменное магнитное поле. Действительно, в первом случае переменное поле будет возбуждать колебания намагниченности вокруг положения равновесия. Во втором случае положение равновесия отсутствует, поскольку все направления намагниченности в плоскости xy эквивалентны. Тогда в переменном поле магнитный момент частицы может свободно вращаться в плоскости xy .

Итак, мы рассчитали магнитную энергию однодоменной частицы с полостью. Она равна

$$U_1 = \frac{4\pi M_s^2}{3} (R_2^3 - R_1^3) \left(\frac{2\pi}{3} - g\beta \right), \quad (14)$$

где $g = 1$ ($g = 1/2$) для первого (второго) случая магнитной анизотропии.

3. Магнитная энергия двухдоменной сферической частицы с полостью

Очевидно, что при достаточно больших размерах частицы однородно намагниченное состояние будет энергетически невыгодно, и в системе возникнет доменная структура. Число и форма доменов будет зависеть в том числе и от размеров частицы. Число доменов будет постепенно расти при увеличении размеров частицы. При этом естественно предположить, что вблизи перехода из однодоменного состояния оптимальное число доменов будет равно двум. По симметрии можно предположить две возможные конфигурации, когда домены располагаются либо в верхней и нижней частях частицы (магнитный момент предполагается направленным вдоль оси z) либо в левой и правой ее частях. Очевидно, что вторая конфигурация будет энергетически более выгодной, поскольку на границе раздела не создается дополнительных магнитных зарядов. Схематически такая доменная структура изображена на рисунке 1(б). Граница раздела доменов лежит в плоскости xz , а распределение намагниченности описывается формулой

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M_s \mathbf{e}_z S(\varphi) \Theta(r - R_1) \Theta(R_2 - r), \quad \operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}) = -M_s S(\varphi) \cos \theta [\delta(r - R_2) - \delta(r - R_1)], \quad (15)$$

где

$$S(\varphi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varphi < \pi, \\ -1, & \pi \leq \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (16)$$

Выполняя расчеты, аналогичные проделанным в предыдущем разделе, получим, что магнитостатическую энергию двухдоменной частицы можно записать в виде

$$U_m^1 = U_m^0 - \Delta U_m, \quad \Delta U_m = \frac{1}{2} M_s^2 [(R_2^3 + R_1^3) f_1(1) - 2R_1^2 R_2 f_1(R_1/R_2)], \quad (17)$$

где

$$f_1(\tau) = 4 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \cos \theta' \int_\pi^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 - 2\tau[\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')]}}. \quad (18)$$

В уравнении (17) U_m^0 есть магнитостатическая энергия однодоменной частицы, даваемая формулой (8), а величина ΔU_m определяет выигрыш в магнитостатической энергии за счет образования доменов. Функция $f_1(\tau)$, входящая в определение ΔU_m , отличается от интеграла (4) наличием множителя 4, а также пределами интегрирования по φ и φ' .

В отличие от формулы (4), четверной интеграл в уравнении (18) не может быть взят аналитически для произвольного τ . Однако оказывается возможным получить аналитические выражения для ΔU_m в двух предельных случаях: когда размер полости мал, $R_1/R_2 \ll 1$, а также когда толщина ферромагнитной области $d = R_2 - R_1$ мала, $d/R_2 \ll 1$. В первом случае будем иметь

$$\Delta U_m \cong \frac{8\pi^2}{9} M_s^2 [C_0 R_2^3 - (2 - C_0) R_1^3], \quad C_0 = \frac{9f_1(1)}{16\pi^2} \cong 0.515, \quad R_1/R_2 \ll 1. \quad (19)$$

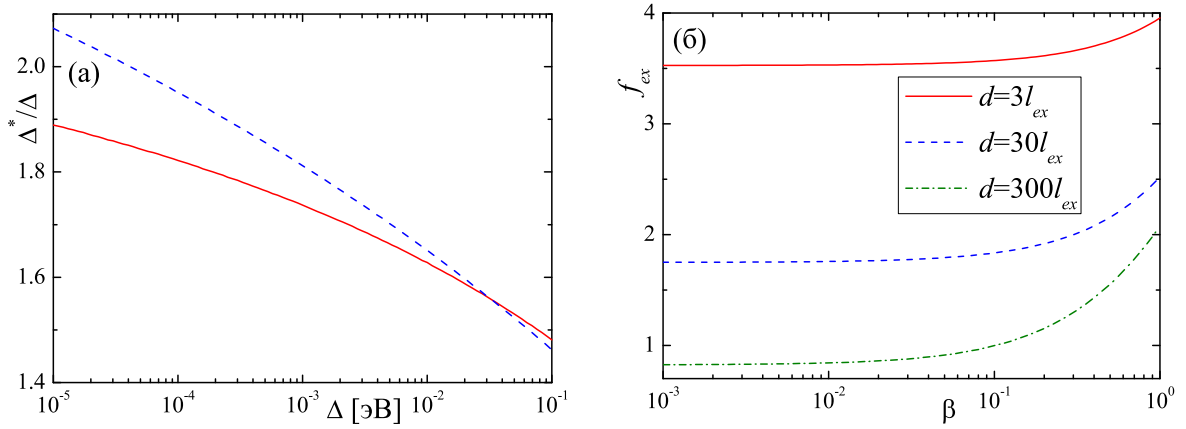


Рисунок 2 – Толщина доменной стенки δ (а) и функция f_{ex} (б) в зависимости от параметра анизотропии $\beta = H_a/M_s$, рассчитанные при трех значениях толщины ферромагнитного слоя d .

Когда полость мала или отсутствует, величины U_m^0 и ΔU_m оказываются одного порядка, $\Delta U_m/U_m^0 \approx 0.515$, при этом $\Delta U_m, U_m^0 \propto R_2^3$.

Рассмотрим теперь предел $d/R_2 \ll 1$. В этом случае удается получить асимптотику для ΔU_m следующего вида

$$\Delta U_m \cong \frac{8\pi^2}{9} M_s^2 C_1 R_2 d^2 \ln \frac{R_2}{d}, \quad C_1 \cong 1.78. \quad (20)$$

Численный анализ показывает, что асимптотика (20) хорошо работает, даже если отношение d/R_2 не слишком мало. Так, при $d/R_2 = 0.3$ ошибка в определении величины ΔU_m по формуле (20) составляет около 12% и быстро уменьшается с уменьшением d/R_2 . Заметим, что в пределе $d/R_2 \ll 1$ отношение $\Delta U_m/U_m^0$ мало. Используя формулы (9) и (20), можно написать

$$\frac{\Delta U_m}{U_m^0} \cong \frac{C_1}{3} \frac{d}{R_2} \ln \frac{R_2}{d} \ll 1. \quad (21)$$

Нетрудно понять, что энергия магнитной анизотропии рассмотренной здесь двухдоменной частицы совпадает с энергией анизотропии однодоменной частицы. Если ось анизотропии фиксирована, то энергия анизотропии будет даваться выражением (11), при этом магнитные моменты в одном домене направлены по, а в другом против оси анизотропии. Если ось анизотропии вращается в плоскости xy , то энергия анизотропии определяется формулой (13), при этом магнитные моменты в доменах противоположны и располагаются в плоскости xy .

Полная энергия двухдоменной частицы включает в себя также энергию доменной стенки, U_{dw} . Вычисление U_{dw} для рассматриваемой геометрии является довольно сложной задачей. Мы ограничимся здесь оценкой U_{dw} по порядку величины. Для этого мы адаптируем выражение для энергии доменной стенки Блоха в пленке толщиной $d = R_2 - R_1$, вычисленной в рамках модели Нееля [3]. В рамках этой модели мы можем написать

$$U_{dw} = \pi M_s^2 (R_2^2 - R_1^2) l_{ex} f_{ex}(\beta, d\sqrt{\beta}/2l_{ex}), \quad (22)$$

где l_{ex} – обменная длина, а функция $f_{ex}(\beta, \tilde{d})$ имеет вид

$$f_{ex}(\beta, \tilde{d}) = \sqrt{\beta} \left(\frac{1}{\zeta_0} + \zeta_0 + \frac{4\pi}{\beta} \frac{\zeta_0^2}{\zeta_0 + \tilde{d}} \right). \quad (23)$$

В этом выражении, $\zeta_0 = \delta\sqrt{\beta}/(2l_{ex})$, где δ – толщина доменной стенки. Первое слагаемое в формуле (23) отвечает обменной энергии, второе – энергии магнитной анизотропии, а третье слагаемое соответствует магнитостатической энергии доменной стенки. Толщина доменной стенки $\delta = 2l_{ex}\zeta_0/\sqrt{\beta}$ определяется минимизацией выражения (23) по ζ_0 , что приводит к уравнению

$$1 - \frac{1}{\zeta_0^2} + \frac{4\pi}{\beta} \frac{\zeta_0^2 + 2\zeta_0\tilde{d}}{(\zeta_0 + \tilde{d})^2} = 0. \quad (24)$$

Найденное таким образом значение ζ_0 используется для расчета величины f_{ex} как функции β и d . На рисунке 2 представлены зависимости δ и f_{ex} как функции параметра анизотропии β , рассчитанные при

трех значениях толщины ферромагнитного слоя d . Оба параметра, β и d , меняются в широких пределах: параметр магнитной анизотропии β меняется на три порядка, а ширина ферромагнитного слоя d на два. Тем не менее мы видим, что функция $f_{ex}(\beta, d)$ меняется в пределах одного порядка, при этом $f_{ex} \sim 1$. Таким образом есть основания считать, что даже если используемый здесь подход не совсем корректен для рассматриваемой геометрии, оценка энергии доменной стенки согласно формуле (22) будет справедливой, по крайней мере по порядку величины.

Толщина доменной стенки δ пропорциональна обменной длине l_{ex} . Обменная длина также входит в выражение (22) для энергии доменной стенки. Значение обменной длины может быть оценено по формуле [4]

$$l_{ex} = \sqrt{\frac{Ja_0^5}{(2\mu_B)^2}}, \quad J = \frac{3k_B T_c}{zS(S+1)}, \quad (25)$$

где a_0 – постоянная решетки, T_c – температура Кюри, S – спин магнитного атома, z – число ближайших соседей атома в кристаллической решетке, а J – интеграл обменного взаимодействия в модели Гейзенберга, оцениваемый в приближении среднего поля [5]. Например, для железа оценка l_{ex} по формуле (25) дает значение $l_{ex} \approx 7.1$ нм.

Разница в полной энергии однодоменной и двухдоменной частицы равна $\Delta U = -\Delta U_m + U_{dw}$. Используя полученные выше формулы, получим, что если $R_1/R_2 \ll 1$, то

$$\Delta U \approx -\frac{8\pi^2}{9} M_s^2 C_0 R_2^3 + \pi M_s^2 R_2^2 l_{ex} f_{ex}. \quad (26)$$

Если же $d/R_2 \ll 1$, то будем иметь

$$\Delta U \approx -\frac{8\pi^2}{9} M_s^2 C_1 R_2 d^2 \ln \frac{R_2}{d} + 2\pi M_s^2 R_2 d l_{ex} f_{ex}. \quad (27)$$

В обоих случаях получается, что если $R_2, d \gtrsim l_{ex}$, то выгодным будет двухдоменное состояние. Таким образом мы видим, что разбитие на домены происходит уже при достаточно малых размерах частицы. Когда $R_2 \gg l_{ex}$, то, очевидно, число доменов в частице должно быть достаточно большим, по крайней мере до тех пор, пока $d \gtrsim l_{ex}$. В заключении этого раздела отметим, что при $d/R_2 \ll 1$ и $R_2 \gg l_{ex}$ мы будем иметь $\Delta U \ll U_m^0$. Таким образом основной вклад в магнитную энергию двухдоменной частицы U_2 в этом случае будет давать магнитостатическая энергия и энергия анизотропии, при этом

$$U_2 \approx 4\pi M_s^2 R_2^2 d \left(\frac{2\pi}{3} - g\beta \right). \quad (28)$$

Эта формула справедлива при $d/R_2 \ll 1$. Если же $R_1 \ll R_2$ и по-прежнему $R_2 \gg l_{ex}$, то будем иметь

$$U_2 \approx \frac{4\pi}{3} M_s^2 R_2^3 \left(\frac{2\pi(1-C_0)}{3} - g\beta \right). \quad (29)$$

4. Магнитная энергия неоднородно намагниченной сферической частицы с полостью

Рассчитаем теперь энергию для третьей конфигурации намагниченности, схематически изображенной на рисунке 1(в). При этом мы будем рассматривать только случай $R_1 \gtrsim l_{ex}$ (причина возникновения данного условия будет объяснена ниже). Распределение намагниченности в частице неоднородно, и в сферических координатах описывается следующей формулой

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M_s (-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) \Theta(r - R_1) \Theta(R_2 - r), \quad (30)$$

где $\mathbf{e}_{x,y}$ – единичные векторы, направленные вдоль осей x и y соответственно. Как уже объяснялось во Введении, выбор такой конфигурации объясняется тем, что она получается при мысленном сворачивании однородно намагниченной пленки в сферу. Нетрудно убедиться в том, что для такой конфигурации $\text{div } \mathbf{M}(\mathbf{r}) \equiv 0$, следовательно, магнитостатическая энергия равна нулю. В то же время обменная энергия будет отлична от нуля. Если считать магнитный материал изотропным, то энергию обменного взаимодействия, связанную с неоднородным распределением намагниченности, можно написать в виде [1]

$$U_{ex} = \frac{l_{ex}^2}{2} \sum_{ij} \int d^3 \mathbf{r} \left(\frac{\partial M^i}{\partial x^j} \right)^2. \quad (31)$$

Такое выражение можно получить, например, в изотропной модели Гейзенберга путем разложения спинов на соседних к заданному узлах в ряд Тейлора. Заметим, что формула (31) справедлива для достаточно гладких функций, когда $\partial M^i/\partial x^j \lesssim M_s/l_{ex}$. Используя выражение (30), получим, что внутри частицы

$$\sum_{ij} \left(\frac{\partial M^i}{\partial x^j} \right)^2 = \frac{M_s^2}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (32)$$

Производные расходятся, во-первых, при $r \rightarrow 0$, а во-вторых, при $\sin \theta \rightarrow 0$. В рассматриваемом случае координата r ограничена снизу, $r > R_1 \gtrsim l_{ex}$, поэтому расходимости остаются только на полюсах, когда $\theta \rightarrow 0$ или $\theta \rightarrow \pi$. При этом интеграл (31) логарифмически расходится вблизи полюсов. Вырежем в частице две цилиндрические области (центрированные на оси z) радиуса $r_0 \sim l_{ex} \ll r$ и высотой d (одна в верхней и одна в нижней части частицы). Тогда интеграл по оставшейся части будет равен

$$U_{ex}^{reg} = 2\pi l_{ex}^2 M_s^2 \int_{R_1}^{R_2} dr \int_{r_0/r}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin \theta} \approx 2\pi M_s^2 l_{ex}^2 \left[R_2 \left(\ln \frac{R_2}{r_0} - 1 \right) - R_1 \left(\ln \frac{R_1}{r_0} - 1 \right) \right]. \quad (33)$$

При $d/R_1 \ll 1$, получим

$$U_{ex}^{reg} \approx 2\pi M_s^2 l_{ex}^2 d \ln \frac{R_2}{r_0}. \quad (34)$$

Внутри вырезанных цилиндров распределение (30) не является оптимальным. Поскольку мы считаем r_0 достаточно малым, то распределение намагниченности в цилиндрах можно считать однородным и направленным по оси z . Магнитостатическая энергия цилиндров (без учета взаимодействия между ними) равна $U_m^c = 8\pi^2 M_s^2 r_0^3 [1 - 3r_0/(4d)]/3$. Кроме того, мы должны учесть энергию доменной стенки между цилиндрами и остальной областью частицы, которую можно оценить как $U_{dw}^c \sim 4\pi M_s^2 r_0 d l_{ex}$, а также энергию магнитной анизотропии $U_a^c = -2g\pi\beta M_s^2 r_0^2 d$. Добавляя все эти три вида энергии к U_{ex}^{reg} и минимизируя по r_0 , нетрудно убедиться в том, что действительно $r_0 \sim l_{ex}$, при этом указанные добавки приводят лишь к перенормировке параметра r_0 в формулах (33) или (34). Поэтому с логарифмической точностью мы можем написать

$$U_{ex} \approx 2\pi M_s^2 l_{ex}^2 d \ln \frac{R_2}{l_{ex}}. \quad (35)$$

Помимо U_{ex} в полную энергию частицы входит также энергия магнитной анизотропии. Нетрудно понять, что в случае, если ось анизотропии частицы фиксирована, то энергия анизотропии для рассматриваемой конфигурации будет даваться формулой (13). Если же ось анизотропии меняется в пространстве так, как это описано в предыдущих разделах, то энергия анизотропии будет минимальна и равна (11). Таким образом, в последнем случае рассматриваемая конфигурация будет более предпочтительна с точки зрения энергии анизотропии по сравнению с однородно намагниченной частицей. Полная энергия для рассматриваемой конфигурации таким образом будет иметь вид

$$U \approx 2\pi M_s^2 l_{ex}^2 d \ln \frac{R_2}{l_{ex}} - g'\beta M_s^2 V, \quad (36)$$

где $g' = 1/2$ ($g' = 1$) для первого (второго) случая магнитной анизотропии.

5. Обсуждение и выводы

Итак, мы рассчитали магнитную энергию круглой ферромагнитной частицы с полостью для трех заданных распределений намагниченности. Сравним теперь полученные результаты между собой. Ранее мы показали, что при $R_2, d \gtrsim l_{ex}$ двухдоменное состояние выгоднее однородно намагниченного. В то же время, сравнивая формулу (36) с (28) или (29), мы видим, что при $R_2, d \gtrsim l_{ex}$ “закрученная” конфигурация является более предпочтительной. Это верно при любом β , если ось анизотропии вращается в некоторой плоскости частицы. Однако даже если ось анизотропии фиксирована, “закрученная” конфигурация остается более выгодной до тех пор, пока поле анизотропии не слишком велико, $\beta = H_a/M_s < \beta_c \sim 1$. Более точно, $\beta_c = 4\pi/3$, если $d/R_2 \ll 1$, или $\beta_c \approx 1.9\pi/3$, когда $R_1/R_2 \ll 1$. Заметим, что формула (36) получена нами при $R_1 \gtrsim l_{ex}$. Случай, когда размер полости мал или полость вообще отсутствует, требует отдельного рассмотрения.

Таким образом мы получили, что при $R_1, R_2, d \gg l_{ex} \sim 5$ нм и при $\beta < \beta_c \sim 1$ энергетически выгодным является состояние, в котором намагниченность частицы закручена в некоторой плоскости. При этом на полюсах частицы образуются два цилиндрических домена с намагниченностью, направленной перпендикулярно поверхности частицы. Надо однако иметь в виду, что при написанных выше условиях возможна также реализация многодоменного состояния, энергию которого мы здесь не

считали. Тем не менее, полученные в работе результаты позволяют сделать определенные выводы в пределе $d/R_2 \ll 1$. Действительно, в разделе 3 мы показали, что в этом пределе поправка к энергии, связанная с образованием двух доменов, ΔU , много меньше энергии однодоменного состояния U_1 , так что $U_2 \sim U_1$. Таким образом можно ожидать, что если число доменов N не слишком велико, то энергия многодоменного состояния U_N также будет порядка U_1 . В этом случае многодоменное состояние также будет проигрывать “закрученной” магнитной конфигурации.

Автор благодарен А.Н. Лагарькову и А.Л. Рахманову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Л.М. Электродинамика сплошных сред. — Наука, 1992.
- [2] Прудников, А.П., Брычков, Ю.А., Маричев, О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — Наука, 1983.
- [3] Хуберт, А. Теория доменных стенок в упорядоченных средах. — Мир, 1977.
- [4] Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. — Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967.
- [5] Смарт Дж. Эффективное поле в теории магнетизма, Мир, Москва. — 1968.

ABOUT MAGNETIC ENERGY OF FERROMAGNETIC PARTICLE WITH CAVITY

Sboychakov A.O.^{1*}

¹ Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics of RAS, Moscow, Russia

* sboycha@mail.ru

Abstract

We study composite materials consisting of ferromagnetic particles embedded into a non-magnetic dielectric medium. It is assumed that ferromagnetic particles are not fulfilled, but contain a cavity, the dimension of which can be of the order of the size of the particle itself. In this work we model the particles by balls with a cut-out core. The aim of this work is to find out the possible distribution of the magnetization inside such a particle, which is optimal in terms of its magnetic energy. For this purpose, three possible magnetic configurations are considered: a uniformly magnetized state, a state with two magnetic domains, as well as a state in which the magnetization is inhomogeneous and twisted in a certain plane. It is shown that under certain assumptions about the properties of the magnetic anisotropy, the third configuration is the optimal of the three considered if the particle size (its radius and thickness of the ferromagnetic region) is much larger than the exchange length.

Key words: magnetic composites, magnetostatics, magnetic anisotropy, domain structure