

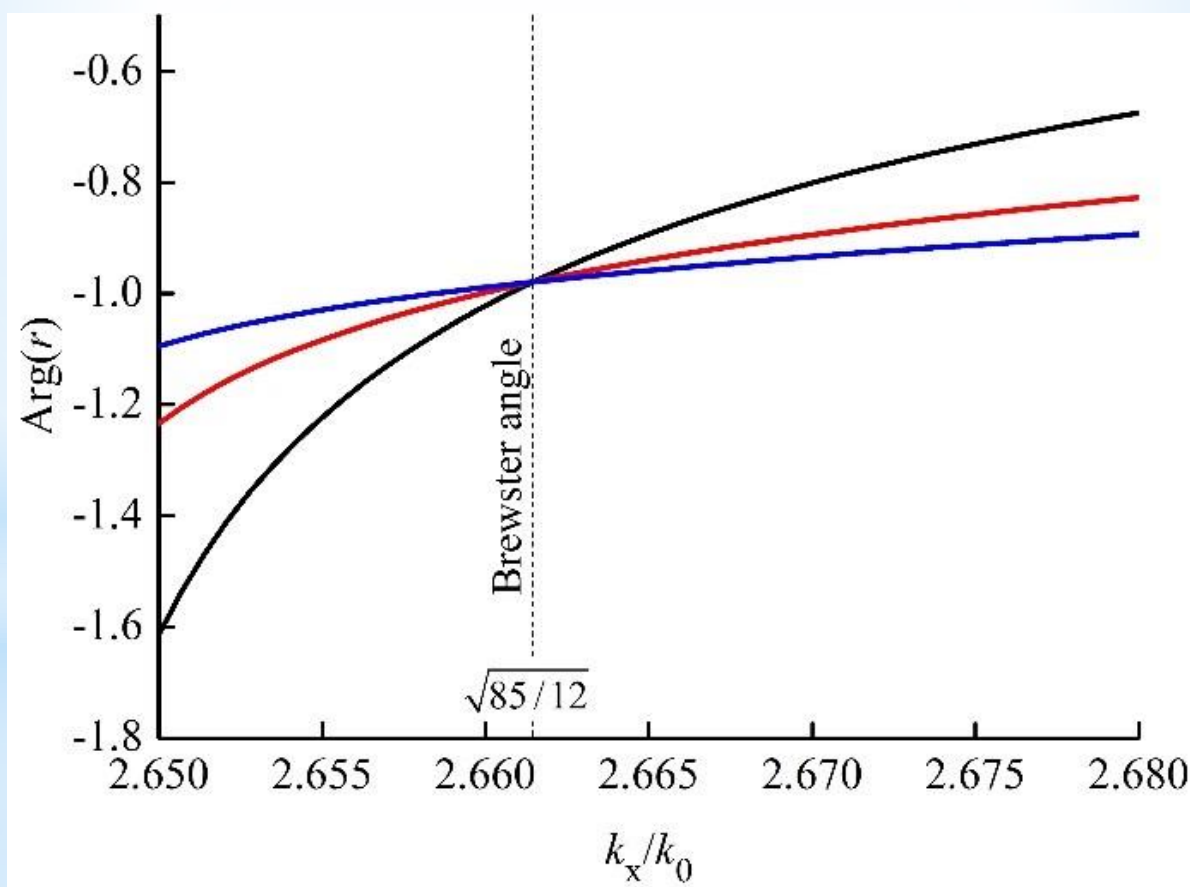


Издательство ИТПЭ РАН

ISSN 2949-0553

# СОВРЕМЕННАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

научный рецензируемый журнал



BREWSTER-LIKE REFLECTIONLESS TRANSMISSION OF EVANESCENT WAVES  
THROUGH A PLANE TWO-MEDIA INTERFACE

A. I. Ignatov, A. M. Merzlikin

2023 апрель -  
май

№ 2 (4)

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт теоретической и прикладной электродинамики  
Российской академии наук

Журнал основан в 2022 году

Выпуск № 2 (4)

# **Современная электродинамика**

**научный рецензируемый журнал**

Под редакцией академика РАН А.Н. Лагарькова

Москва, 2023

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук

**ISSN 2949-0553**

Современная электродинамика

Научный рецензируемый журнал. Издаётся с октября 2022 года.

Выходит один раз в два месяца.

**№ 2 (4)**

**апрель - май 2023**

*Главный редактор* академик РАН А.Н.Лагарьков

*Редакционная коллегия:* к.т.н. Н.П. Балабуха, к.т.н. К.М. Басков, к.т.н. А.А. Башарин, д.ф.-м.н. А.П. Виноградов, д.ф.-м.н. А.А. Дорофеев, д.ф.-м.н. В.Н. Кисель, к.ф.-м.н. К.И. Кугель, д.ф.-м.н. А.М. Мерзликин, д.ф.-м.н. А.А. Пухов, д.ф.-м.н. А.Л. Рахманов, д.ф.-м.н. А.В. Рожков, д.ф.-м.н. К.Н. Розанов, к.т.н. И.А. Рыжиков, д.ф.-м.н. А.К. Сарычев, к.ф.-м.н. В.С. Солосин

*Адрес редакции:*

125412, г. Москва, ул. Ижорская, д.13, стр. 6

тел., факс 8 (495) 484-26-33

эл.почта [electrodynamics@mail.ru](mailto:electrodynamics@mail.ru)

Свидетельство о регистрации Эл № ФС77-83666 от 26.07.2022 г.

Подписано в печать 31.05.2023. Тираж 30 экз.

© ИТПЭ РАН, 2023

# Содержание номера

<b>1</b>	<b>Теоретическая электродинамика</b>	<b>4</b>
	Ignatov A.I., Merzlikin A.M. BREWSTER-LIKE REFLECTIONLESS TRANSMISSION OF EVANESCENT WAVES THROUGH A PLANE TWO-MEDIA INTERFACE . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Вопросы экспериментальной электродинамики</b>	<b>12</b>
	Балабуха Н.П., Зубов А.С., Меньших Н.Л., Солосин В.С. МОДЕРНИЗАЦИЯ ЗВЕЗДООБРАЗНОЙ КРОМКИ КОЛЛИМАТОРА МАРК-12 . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Взаимодействие электромагнитного поля с материалами</b>	<b>17</b>
	Дорофеев А.В., Нечепуренко И.А., Базакуца А.П., Бутов О.В. МОДЕЛЬ ВОЛОКОННОГО ЭРБИЕВОГО УСИЛИТЕЛЯ ДЛЯ АНА- ЛИЗА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА И ШУМОВ .	17
<b>4</b>	<b>Методические заметки</b>	<b>26</b>
	Андрианов Е.С., Виноградов А.П. КВАНТОВАНИЕ ПЛАЗМОНА . . . . .	26

# BREWSTER-LIKE REFLECTIONLESS TRANSMISSION OF EVANESCENT WAVES THROUGH A PLANE TWO-MEDIA INTERFACE

Ignatov A.I. \* <sup>1</sup>, Merzlikin A.M.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics RAS, Moscow, Russia*

Received: 11.04.2023

Accepted: 16.05.2023

Published: 31.05.2023

## Abstract

We propose a Brewster-like reflectionless transmission effect of evanescent waves: no evanescent reflected waves are observed at evanescent wave incidence on a plane interface of two media. Similar to the well-known Brewster effect for propagating waves, the proposed Brewster-like effect for evanescent waves occurs when surface impedances of waves in the neighboring media are equal. Contrary to the known Brewster effect for complex incidence angles related to the existence of some surface wave (when surface impedances are equal for evanescent waves to both sides of the two-media interface decaying in the directions away from the interface), the proposed Brewster-like reflectionless transmission corresponds to the surface impedances equality for evanescent waves decaying in the same direction. It was shown that the proposed Brewster-like effect for evanescent waves can occur for both ( $p$ - and  $s$ -) polarizations and only for magnetic media ( $\mu \neq 1$  for at least one of the two neighboring media). Based on the proposed Brewster-like reflectionless transmission of evanescent waves, we suggest a method of a totally-reflected-wave's phase patterning with a pattern vanishing exactly at Brewster's angle.

**Keywords:** Brewster effect, evanescent wave, near field, magnetodielectric, surface wave

EDN RRYJEX

## 1. Introduction

The famous Brewster effect has been known for more than two centuries in optics of dielectric media [1]. This effect is one of the basic ones in polarization optics and it has numerous applications, e.g., in polarizers, glare filters, gas lasers, for broadband angular selectivity, for avoiding unwanted light reflection in holography and microscopy [2–7].

Due to the rapid development of electrodynamics of metamaterials (including optics of metamaterials with non-unit magnetic permeability [8–11]) in the last years, the Brewster effect has been intensively studied for magnetodielectric media interfaces [12–19]. For example, the Brewster effect was predicted for  $s$ -polarized waves on an interface of two magnetodielectric media with positive refractive indices [12, 13, 19], for either  $s$ - or  $p$ -polarized waves on an interface of media with positive and negative refractive indices [18]. In addition, it was shown that under some conditions the Brewster angle at a two-media interface is absent for both polarizations [15] or under some other conditions it exists simultaneously for both polarizations [15].

The extension of many effects formerly known for propagating waves to the case of evanescent optical waves (near field) has been one of the important trends in modern optics (nanooptics) in the last two decades. Thus, a near-field optical microscope [20], near-field optical tweezers [21], near-field molecular spectroscopy [22, 23], and near-field holography [24] have been developed. In the current article, we consider transmission of evanescent waves through systems of magnetodielectric layers and, in particular, analyze an analog of the Brewster effect for evanescent waves when no evanescent reflected waves are observed at evanescent wave incidence on a plane interface between two media (below we will refer to this effect as the Brewster-like reflectionless transmission of evanescent waves).

First, we recollect features of the Brewster effect for propagating waves in magnetodielectric layers. Then, we analyze if a Brewster-like reflectionless transmission of evanescent waves exists. Finally, we consider

---

\*ignatovtoha@gmail.com

a possible application of the Brewster-like reflectionless transmission of evanescent waves.

## 2. Theory. Description of the Brewster effect for propagating waves in terms of surface impedances

First, let us recollect features of the Brewster effect for propagating waves. The well-known Brewster effect on an interface of two dielectrics proves itself as zero reflection of a  $p$ -polarized propagating plane wave incident on this interface at a certain angle (Brewster's angle). Similarly, the variations of the Brewster effect at interfaces of magnetodielectric media (either for  $p$ - or for  $s$ -polarization) studied in [13–15, 18] show themselves in zero reflection of propagating plane waves incident on these interfaces at certain angles. This zero reflection, corresponding to Brewster's angle, meets the equality condition of surface impedances  $Z$  of waves in neighboring magnetodielectrics (read [25] on surface impedance). Indeed, let us consider a plane interface of two half-spaces filled with magnetodielectrics with permittivity and permeability  $\varepsilon_1$  and  $\mu_1$  and with  $\varepsilon_2$  and  $\mu_2$  (see Fig. 1).

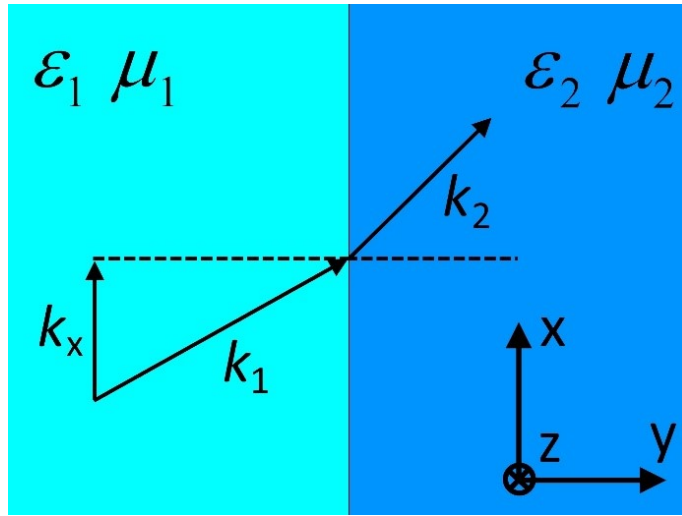


Fig. 1 – Transmittance of a plane wave through an interface – between magnetodielectric with dielectric permittivity  $\varepsilon_1$  and magnetic permeability  $\mu_1$  and magnetodielectric with  $\varepsilon_2$  and  $\mu_2$ .

By definition, surface impedance  $Z$  of a plane wave incident on a plane surface is the proportionality coefficient between the electric field component  $\mathbf{E}_t$  tangent to this surface and the tangent component  $\mathbf{H}_t$  of the magnetic field of this wave:

$$\mathbf{E}_t = Z [\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}], \quad (1)$$

where  $\mathbf{n}$  is a normal vector to the surface [25]. Thus, surface impedance is a value determined both by the plane wave and by the surface considered. Surface impedance characterizes a single (with definite wave vector  $\mathbf{k}$  and definite polarization  $s$ - or  $p$ -) wave incident on a plane surface. Note that  $Z$  of a reflected wave has the opposite sign compared to  $Z$  of the incident wave because  $\mathbf{H}_t$  changes its sign on reflection concerning the  $xz$ -plane whereas  $\mathbf{E}_t$  remains unchanged. The Maxwell's boundary conditions are known to require the continuity of electric and magnetic field tangent components at a media interface. Therefore, the equality of the surface impedance of a wave in one medium to the surface impedance of a wave in another – neighboring – medium means that only one wave (either incident or transmitted) in each medium is needed to meet the boundary conditions on the media's common interface. In other words, when the surface impedance of a wave incident on an interface from one medium equals to the surface impedance of the transmitted wave in another medium to the other side of the interface, the reflected wave is absent.

Let us consider the cases of  $p$ - and  $s$ -polarized waves in more details and derive expressions for surface impedances in magnetodielectric medium. We consider a plane wave with the wave vector  $\mathbf{k}_1$  incident on a plane interface parallel to the coordinate plane  $xz$  (see Fig. 1). The plane of incidence is parallel to the coordinate plane  $xy$  and the tangent component of the wave vector equals to  $k_x$  (this component remains the same for waves in both sides from the interface). First, let us consider  $p$ -polarized waves with magnetic fields parallel to the  $z$ -axis. The  $z$ -component of the magnetic field is  $H_z = A_z \exp(ik_{1y}y + ik_x x)$  (here and further we omit the factor  $\exp(-i\omega t)$ ), where  $k_{1y} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_1 \mu_1 - k_x^2}$  is the  $y$ -component of the wave vector  $\mathbf{k}_1$  in the first medium,  $A_z$  is the magnetic field amplitude and  $k_0$  is the wave number in vacuum. From the Maxwell equations,  $E_x = -(\partial H_z / \partial y) / ik_0 \varepsilon_1 = -k_{1y} H_z / k_0 \varepsilon_1$ . Therefore, the surface impedance of the wave in the first

medium with  $\varepsilon_1$  and  $\mu_1$  is

$$Z_{1p} \equiv \frac{E_x}{[\mathbf{H} \times \mathbf{e}_y]_x} = -\frac{E_x}{H_z} = \frac{k_{1y}}{k_0\varepsilon_1} = \frac{\sqrt{k_0^2\varepsilon_1\mu_1 - k_x^2}}{k_0\varepsilon_1}. \quad (2)$$

The surface impedances equality condition

$$\sqrt{k_0^2\varepsilon_1\mu_1 - k_x^2}/k_0\varepsilon_1 \equiv Z_{1p} = Z_{2p} \equiv \sqrt{k_0^2\varepsilon_2\mu_2 - k_x^2}/k_0\varepsilon_2 \quad (3)$$

gives

$$(k_x/k_0)_p^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1)/(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2). \quad (4)$$

In the case of nonmagnetic media, this condition has the form of  $(k_x/k_0)^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  and transforms into the well-known formula  $\tan\alpha_1 \equiv (k_x/k_0)/\sqrt{\varepsilon_1 - (k_x/k_0)^2} = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$ , where  $\alpha_1$  is the incidence angle of a wave in the medium with dielectric permittivity  $\varepsilon_1$ .

By analogy, we consider an  $s$ -polarized wave. The electric field is directed along the  $z$ -axis and equals to  $E_z = A_z \exp(ik_{1y}y + ik_x x)$ , where  $A_z$  is the electric field amplitude. From the Maxwell equations,  $H_x = (\partial E_z/\partial y)/ik_0\mu_1 = k_{1y}E_z/k_0\mu_1$ . Therefore, the surface impedance of the wave in the medium with  $\varepsilon_1$  and  $\mu_1$  is

$$Z_{1s} \equiv \frac{E_z}{[\mathbf{H}_x \times \mathbf{e}_y]_z} = \frac{E_z}{H_x} = \frac{k_0\mu_1}{k_{1y}} = \frac{k_0\mu_1}{\sqrt{k_0^2\varepsilon_1\mu_1 - k_x^2}}, \quad (5)$$

and the surface impedances equality condition  $Z_{1s} = Z_{2s}$  gives the formula for Brewster's angle

$$(k_x/k_0)_s^2 = \mu_1\mu_2(\varepsilon_2\mu_1 - \varepsilon_1\mu_2)/(\mu_1^2 - \mu_2^2). \quad (6)$$

Even though the Brewster effect in magnetodielectric media was described and studied more than forty years ago [19], the case when there are only waves evanescent in the  $y$ -direction in neighboring layers (i.e. the "complex incidence angle" case when  $k_x^2 > k_0^2\varepsilon_1\mu_1$  and  $k_x^2 > k_0^2\varepsilon_2\mu_2$ ) has been analyzed incompletely. In particular, the case of surface impedances equality for evanescent waves decaying in the same direction (e.g. in the  $+y$ -direction) in two neighboring media has not been considered yet. On the contrary, the case of surface impedances equality for evanescent waves to both sides of the two-media interface decaying in the directions away from the interface is well-studied and is commonly related to as the Brewster condition at complex incidence angles [26]. The last case corresponds to a surface wave running along the two-media interface (e.g. surface plasmon-polariton, Zenneck wave etc.) [26, 27].

In the present paper, we carefully analyze the case of an evanescent wave incidence on a two magnetodielectric media interface and find out whether a kind of a Brewster-like reflectionless transmission exists in this case of evanescent waves.

### 3. Results. The Brewster effect for evanescent waves

Let us consider a medium with  $\varepsilon_1$  and  $\mu_1$  (we consider only real-valued dielectric permittivities and magnetic permeabilities in this paper). Let a  $p$ -polarized plane wave evanescent in the  $y$ -direction with  $k_x^2 > k_0^2\varepsilon_1\mu_1$  propagate in this medium. In this case, magnetic field  $H_z = A_z \exp(-\kappa_{1y}y + ik_x x)$  and the  $x$ -component of the electric field  $E_x = -(\partial H_z/\partial y)/ik_0\varepsilon_1 = \kappa_{1y}H_z/ik_0\varepsilon_1 \equiv -Z_{1p}H_z$ , where  $\kappa_{1y} = \sqrt{k_x^2 - k_0^2\varepsilon_1\mu_1} > 0$  and

$$Z_{1p} = -\kappa_{1y}/ik_0\varepsilon_1 = -\sqrt{k_x^2 - k_0^2\varepsilon_1\mu_1}/ik_0\varepsilon_1. \quad (7)$$

By analogy, for an evanescent wave decaying in the  $y$ -direction with  $k_x^2 > k_0^2\varepsilon_2\mu_2$  in the medium with  $\varepsilon_2$  and  $\mu_2$   $H_z = \hat{A}_z \exp(-\kappa_{2y}y + ik_x x)$ , and  $E_x \equiv -Z_{2p}H_z = \kappa_{2y}H_z/ik_0\varepsilon_2$ , where  $\kappa_{2y} = \sqrt{k_x^2 - k_0^2\varepsilon_2\mu_2} > 0$  and  $\hat{A}_z$  is the magnetic field amplitude in the second medium. Therefore, in the case of  $Z_{1p} = Z_{2p}$ , it can be possible that only one above-mentioned evanescent wave decaying in the  $y$ -direction exists in each medium (see Fig. 2) and Maxwell's boundary conditions at the media interface are met.

Let us analyze in details the condition  $Z_{1p} = Z_{2p}$  under the assumptions  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mu_1, \mu_2 \neq 0$ ,  $k_x^2 > k_0^2\varepsilon_1\mu_1$ ,  $k_x^2 > k_0^2\varepsilon_2\mu_2$ ,  $\kappa_{1y} > 0$  and  $\kappa_{2y} > 0$ . From this condition we obtain  $\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0$  (contrary to the surface plasmon-polariton existence condition when  $\kappa_{1y} = -\sqrt{k_x^2 - k_0^2\varepsilon_1\mu_1} < 0$  and  $\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$ ). The Brewster condition  $Z_{1p} = Z_{2p}$  in this case is

$$(k_x/k_0)_p^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1)/(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) > 0 \quad (8)$$

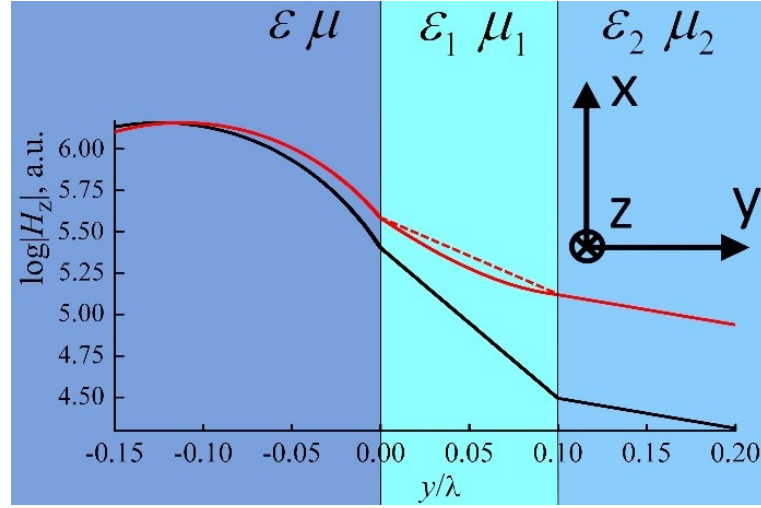


Fig. 2 – Dependencies of magnetic field  $z$ -component magnitude (in logarithmic scale) on the  $y$ -coordinate in the case of a  $p$ -polarized plane wave with  $k_x = k_0\sqrt{85/12}$  incident in the  $xy$ -plane from the left. The black curve corresponds to the case of  $\varepsilon_2 = 1.0$  and  $\mu_2 = 7.0$ , the solid red curve – to the case of  $\varepsilon_2 = 7.0$  and  $\mu_2 = 1.0$ . In both cases,  $\varepsilon = 9.0$ ,  $\mu = 1.0$ ,  $\varepsilon_1 = 5.0$  and  $\mu_1 = 1.0$ . At  $y < 0$  there is the medium with  $\varepsilon$  and  $\mu$ , at  $0 < y < 0.1\lambda$  the layer with  $\varepsilon_1$  and  $\mu_1$  is placed, and at  $y > 0.1\lambda$  there is the half-space with  $\varepsilon_2$  and  $\mu_2$ . The dashed red line is a straight-line segment connecting points of the solid red curve

and is the same as given above (4) for non-evanescent waves. Then, assuming  $\varepsilon_1^2 > \varepsilon_2^2$  without loss of generality, we have  $\varepsilon_1\mu_2 > \varepsilon_2\mu_1$ . In turn, from the conditions  $(k_x/k_0)^2 > \varepsilon_1\mu_1$  and  $(k_x/k_0)^2 > \varepsilon_2\mu_2$  we have  $\varepsilon_2\mu_2 > \varepsilon_1\mu_1$  (both for  $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$  and for  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 0$ ). These conditions

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_1^2 > \varepsilon_2^2, \quad \varepsilon_1\mu_2 > \varepsilon_2\mu_1 \quad \text{and} \quad \varepsilon_2\mu_2 > \varepsilon_1\mu_1 \quad (9)$$

However, they require  $\mu_2 \neq \mu_1$ . Therefore, the Brewster-like reflectionless transmission for evanescent  $p$ -polarized waves cannot be realized for nonmagnetic media.

By analogy, we consider the case of  $s$ -polarized waves evanescently decaying in the  $y$ -direction with  $k_x^2 > k_0^2\varepsilon_1\mu_1$  and  $k_x^2 > k_0^2\varepsilon_2\mu_2$ . In the first medium the electric field is  $E_z = A_z \exp(-\kappa_{1y}y + ik_x x)$  and the  $x$ -component of the magnetic field is  $H_x \equiv E_z/Z_{1s} = -\kappa_{1y}E_z/ik_0\mu_1$ , where

$$Z_{1s} = -ik_0\mu_1/\kappa_{1y} = -ik_0\mu_1 / \sqrt{k_x^2 - k_0^2\varepsilon_1\mu_1}. \quad (10)$$

It follows from the surface impedances equality condition  $-ik_0\mu_1/\kappa_{1y} \equiv Z_{1s} = Z_{2s} \equiv -ik_0\mu_2/\kappa_{2y}$  and with  $\kappa_{1y} > 0$  and  $\kappa_{2y} > 0$  that  $\mu_1\mu_2 > 0$  and the Brewster condition  $Z_{1s} = Z_{2s}$  is

$$(k_x/k_0)_s^2 = \mu_1\mu_2 (\varepsilon_2\mu_1 - \varepsilon_1\mu_2) / (\mu_1^2 - \mu_2^2) > 0, \quad (11)$$

having the same view as for the case of non-evanescent  $s$ -polarized waves (6). Therefore, for the last inequality along with conditions  $k_x^2 > k_0^2\varepsilon_1\mu_1$  and  $k_x^2 > k_0^2\varepsilon_2\mu_2$  to be compatible, the following conditions must be satisfied (without loss of generality):

$$\mu_1\mu_2 > 0, \quad \varepsilon_1\mu_1 > \varepsilon_2\mu_2 \quad \text{and} \quad \varepsilon_1\mu_2 > \varepsilon_2\mu_1 \quad \text{at} \quad \mu_2^2 > \mu_1^2. \quad (12)$$

Obviously, these inequalities require  $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$ . As in the case of  $p$ -polarized evanescent waves, the Brewster-like reflectionless transmission for  $s$ -polarized evanescent waves does not occur in nonmagnetic media.

By a particular example let us illustrate the fact that a reflected evanescent wave is absent in the case of equal surface impedances. We consider a layer of the thickness  $d = 0.1\lambda$  with  $\varepsilon_1 = 5.0$  and  $\mu_1 = 1.0$  between a half-space with  $\varepsilon_2 = 1.0$  and  $\mu_2 = 7.0$  (to the right of the layer) and a half-space with  $\varepsilon = 9.0$  and  $\mu = 1.0$  (to the left of the layer) (see Fig. 2). The specified values of  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mu_1, \mu_2$  meet the conditions (9) when the Brewster-like reflectionless transmission for  $p$ -polarized evanescent waves can occur. Let a  $p$ -polarized wave with the  $x$ -component of the wave vector  $k_x$  be incident from the left half-space. The Brewster-like reflectionless transmission through the interface between the layer with  $\varepsilon_1$  and  $\mu_1$  and the right half-space with  $\varepsilon_2$  and  $\mu_2$  is realized at  $(k_x/k_0)_p^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 (\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1) / (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) = 85/12$  (Eq. 4). In this case,  $(k_x/k_0)_p^2 > \varepsilon_1\mu_1 = 5$ ,



$(k_x/k_0)_p^2 > \varepsilon_2\mu_2 = 7$  and  $(k_x/k_0)_p^2 < \varepsilon\mu = 9$ . As shown in Fig. 2 (black curve), under the condition of  $(k_x/k_0)_p^2 = 85/12$ , only one evanescent wave (decaying in the  $y$ -direction) exists in the layer. On the contrary, if  $\varepsilon_2 = 7.0$  and  $\mu_2 = 1.0$ , the Brewster condition is not met at  $(k_x/k_0)^2 = 85/12$ , and the field in the layer is a sum of two evanescent waves, one of which decays in the  $y$ -direction and the other grows (see the solid red line in Fig. 2 which is not a straight-line segment in the layer).

Thus, the proposed Brewster-like effect manifests itself in the absence of a reflected evanescent wave. On the other hand, contrary to the Brewster effect for propagating waves, the power reflection coefficient is a unity in some range of values of  $k_x$  around Brewster's angle because of total internal reflection.

#### 4. Discussion. Reflected wave phase tailoring

One of the actively developing areas of modern electromagnetics is electrodynamics of metasurfaces – surfaces structured on a subwavelength scale in a certain way. One of the applications of metasurfaces is manipulating the phase and amplitude of reflected waves along a metasurface plane [28,29]. The described Brewster-like reflectionless transmission of evanescent waves enables manipulating the phase of a wave totally reflected from a layered surface depending on the thicknesses of layers. In this case, the reflected wave phase may depend on the layers' thicknesses only at incidence angles that do not meet the Brewster condition ((4) or (6)) whereas the phase of the reflected wave is independent of the layers' thicknesses if the incident wave satisfies the Brewster condition.

To illustrate this effect, let us consider a plane magnetodielectric layer between two half-spaces of magnetodielectrics (see Fig. 3) again. Let a  $p$ -polarized plane wave with  $x$ -component  $k_x$  of the wave vector be incident from the left half-space.

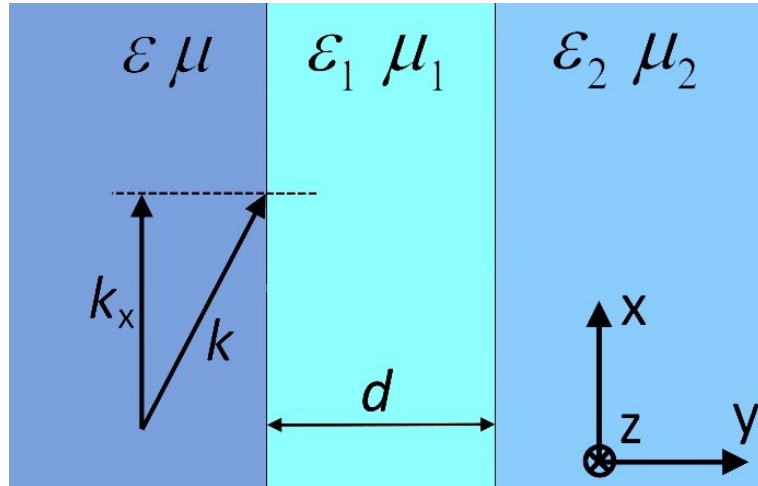


Fig. 3 – The structure demonstrating manipulation of a reflected wave phase. A plane wave with  $x$ -component  $k_x$  of the wave vector is incident from the left half-space with  $\varepsilon$  and  $\mu$  on a layer with  $\varepsilon_1$  and  $\mu_1$

If the Brewster condition (4) is met at the interface of the layer and the right half-space, a reflected evanescent wave (growing in the  $y$ -direction) is absent in the layer. Therefore, the characteristics of the wave reflected in the left half-space is independent of the layer thickness. Indeed, this can be seen in Fig. 4, where the phase of the reflectance  $r$  in the left half-space is shown as a function of  $k_x/k_0$  for different layer thicknesses  $d$  and for  $\varepsilon_2 = 1.0$  and  $\mu_2 = 7.0$  (the  $r$  magnitude equals to 1 at the Brewster condition because  $(k_x/k_0)_p^2 > \varepsilon_2\mu_2$ ). However, if the Brewster condition (4) is not met there is a reflected evanescent wave in the layer growing in the  $y$ -direction, which leads to the dependence of  $r$  phase on  $d$ .

Based on this effect of reflectance phase independence on  $d$  at the Brewster condition (4) and reflectance phase dependence on  $d$  for other incidence angles, we could tailor the reflected field phase distribution along the reflecting surface (by setting the distribution of  $d$  along the surface while the interface between the medium with  $\varepsilon$  and  $\mu$  and the medium with  $\varepsilon_1$  and  $\mu_1$  remains plane) so that this distribution depends on the incidence angle  $k_x/k_0$ . At Brewster's incidence angle, the reflectance from the surface has a uniform phase distribution.

#### 5. Conclusions

In the paper we proposed the Brewster-like reflectionless transmission of evanescent waves through a two-media interface. If an evanescent wave is incident on a plane interface between two media (in the case

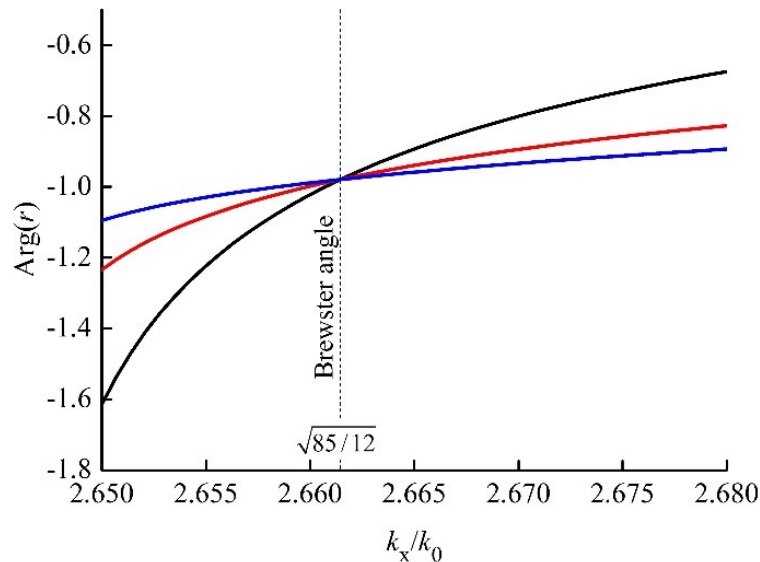


Fig. 4 – Phase of the reflectance  $r$  in the left half-space (see Fig. 2 or Fig. 3) as functions of  $k_x/k_0$ . The black curve corresponds to the layer thickness  $d = 0$ , the red curve –  $d = 0.05\lambda$ , the blue curve –  $d = 0.1\lambda$

of incident wave decaying along the normal to the interface in the direction to the interface), the reflected evanescent wave, decaying in the direction opposite to that of the incident wave, may be absent. Similar to the known Brewster effect for propagating waves, the proposed Brewster-like effect for evanescent waves occurs when surface impedances of waves in the neighboring media are equal. Contrary to the known Brewster effect for complex incidence angles related to existence of some surface wave (when surface impedances are equal for evanescent waves to both sides of the two-media interface decaying in the directions away from the interface), the proposed Brewster-like reflectionless transmission corresponds to the surface impedances equality for evanescent waves decaying in the same direction.

We considered both the cases of  $p$ - and  $s$ -polarized waves. It was shown that the Brewster-like reflectionless transmission for evanescent waves could occur for any of these polarizations. In the case of each of these polarizations, it is necessary that at least one of the two neighboring media has magnetic properties (i.e. has magnetic permeability different from unity) for the reflectionless transmission to take place.

Based on the Brewster-like reflectionless transmission effect for evanescent waves, we proposed a method of tailoring of totally-reflected-wave phase distribution in the plane of a reflecting surface. If we take such system of plane layers as a reflecting system, that the Brewster condition for evanescent waves is met at the interfaces between these layers, the reflected wave phase will be independent of the number and the thicknesses of these layers at the Brewster condition. However, at other angles the reflected wave's phase will depend on the characteristics of this layered system. This fact could be used for the development of a structured layered system with layers' thicknesses varying along the layers plane, thus, providing a desired totally-reflected-wave phase distribution. This distribution would be observed only for incidence angles different from Brewster's angle, whereas the phase distribution would be uniform at Brewster's angle.

## Список литературы

- [1] Brewster, D. On the laws which regulate the polarisation of light by reflexion from transparent bodies. // Philosophical transactions of the Royal Society of London. – 1815. – 105. – P. 125-159.
- [2] Born, M., Wolf, E. Principles of Optics. – Pergamon, Oxford, 1969.
- [3] Magnusson, R., Shin, D., Liu, Z.S. Guided-mode resonance Brewster filter. // Opt. Lett. – 1998. – 23. – P. 612-614.
- [4] Hecht, E. Optics, fifth ed. – Pearson, Edinburgh, 2017.
- [5] Kong, J.A. Electromagnetic wave theory. – EMW Publishing, Cambridge, MA, 2008.
- [6] Cohen Stuart, M.A., Wegh, R.A.J., Kroon, J.M., Sudholter, E.J.R. Design and testing of a low-cost and compact Brewster angle microscope. // Langmuir. – 1996. – 12. – 2863.
- [7] Yichen Shen, Dexin Ye, Celanovic, I., Johnson, S.G., Joannopoulos, J.D., Soljacic, M. Optical broadband angular selectivity. // Science. – 2014. – 343. – P. 1499-1501.

- [8] Linden, S., Enkrich, C., Wegener, M., Jiangfeng Zhou, Koschny, T., Soukoulis, C.M. Magnetic Response of Metamaterials at 100 Terahertz. // *Science*. – 2004. – 306. – P. 1351-1353.
- [9] Enkrich, C., Wegener, M., Linden, S., Burger, S., Zschiedrich, L., Schmidt, F., Zhou, J.F., Koschny, T., Soukoulis, C.M. Magnetic metamaterials at telecommunication and visible frequencies. // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – 95. – 203901.
- [10] Valentine, J., Shuang Zhang, Zentgraf, T., Ulin-Avila, E., Genov, D.A., Bartal, G., Xiang Zhang. Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index. // *Nature*. – 2008. – 455. – P. 376-380.
- [11] Moitra, P., Yuanmu Yang, Anderson, Z., Kravchenko, I.I., Briggs, D.P., Valentine, J. Realization of an all-dielectric zero-index optical metamaterial. // *Nature Photonics*. – 2013. – 7. – P. 791-795.
- [12] Tanaka, T., Ishikawa, A., Kawata, S. Unattenuated light transmission through the interface between two materials with different indices of refraction using magnetic metamaterials. // *Phys. Rev. B*. – 2006. – 73. – 125423.
- [13] Tamayama, Y., Nakanishi, T., Sugiyama, K., and Kitano, M. Observation of Brewster's effect for transverse-electric electromagnetic waves in metamaterials: experiment and theory. // *Phys. Rev. B*. – 2006. – 73. – 193104.
- [14] Watanabe, R., Iwanaga, M., Ishihara, T. S-polarization Brewster's angle of stratified metal-dielectric metamaterial in optical regime. // *Physica Status Solidi (b)*. – 2008. – 245. – P. 2696-2701.
- [15] Ignatov, A.I., Merzlikin, A.M., Vinogradov, A.P., Lisyansky, A.A. Effect of polarization upon light localization in random layered magnetodielectric media. // *Phys. Rev. B*. – 2011. – 83. – 224205.
- [16] Veselago, V.G. Electrodynamics of materials with negative index of refraction. // *Physics-Uspokhi*. – 2003. – 46. – P. 764-768.
- [17] Doyle, W.T. Graphical approach to Fresnel's equations for reflection and refraction of light. // *American J. Physics*. – 1980. – 48. – P. 643-647.
- [18] Ceji Fu, Zhuomin M. Zhang, First, P.N. Brewster angle with a negative-index material. // *Appl. Optics*. – 2005. – 44. – P. 3716-3724.
- [19] Lorrain, P., Corson, D.R. *Electromagnetic fields and waves*, second ed. – Freeman, San Francisco, 1970.
- [20] Heinzlmann, H., Pohl, D.W. Scanning near-field optical microscopy. // *Appl. Phys. A*. – 1994. – 59. – P. 89-101.
- [21] Novotny, L., Bian, R.X., Sunney Xie, X. Theory of nanometric optical tweezers. // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – 79. – P. 645-648.
- [22] Trautman, J.K., Macklin, J.J., Brus, L.E., Betzig, E. Near-field spectroscopy of single molecules at room temperature. // *Nature*. – 1994. – 369. – P. 40-42.
- [23] Novotny, L., Stranick, S.J. Near-field optical microscopy and spectroscopy with pointed probes. // *Annual Rev. of Physical Chemistry*. – 2006. – 57. – P. 303-331.
- [24] Bozhevolnyi, S.I., Vohnsen, B. Near-field optical holography. // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – 77. – P. 3351-3354.
- [25] Landau, L.D., Pitaevskii, L.P., Lifshitz, E.M. *Electrodynamics of continuous media*, Vol. 8, (Course of Theoretical Physics), second ed. – Butterworth-Heinemann, London, 1984.
- [26] Stratton, J.A. *Electromagnetic theory*. – McGraw-Hill Book Company, New York and London, 1941.
- [27] Polo, Jr., J.A., Mackay, T.G., Lakhtakia, A. *Electromagnetic surface waves. A modern perspective*. – Elsevier, Waltham, 2013.
- [28] Pors, A., Albrechtsen, O., Radko, I.P., Bozhevolnyi, S.I. Gap plasmon-based metasurfaces for total control of reflected light. // *Scientific Reports*. – 2013. – 3. – 2155.
- [29] Xin Li, Shiyi Xiao, Beigeng Cai, Qiong He, Tie Jun Cui, Lei Zhou. Flat metasurfaces to focus electromagnetic waves in reflection geometry. // *Opt. Lett.* – 2012. – 37. – P. 4940-4942.

# БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНОЕ ПРОХОЖДЕНИЕ (ЭФФЕКТ БРЮСТЕРА) ЭВАНЕСЦЕНТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ ДВУХ СРЕД

Игнатов А.И.<sup>1\*</sup>, Мерзликин А.М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

\* ignatovtoha@gmail.com

## Аннотация

Мы описываем и теоретически анализируем эффект безотражательного прохождения эванесцентных волн через границу сред, подобный эффекту Брюстера для распространяющихся волн. Данный эффект выражается в том, что если на плоскую границу раздела двух сред падает эванесцентная волна (когда падающая волна затухает в направлении по нормали к границе раздела двух сред), то отраженная эванесцентная волна, затухающая в направлении, противоположном направлению затухания падающей волны, отсутствует. Назовем данный эффект безотражательным прохождением Брюстера для эванесцентных волн. Подобно известному эффекту Брюстера для распространяющихся волн, безотражательное прохождение Брюстера для эванесцентных волн возникает, когда поверхностные импедансы волн в граничащих средах равны. Известный эффект Брюстера для комплексного угла падения связан с существованием поверхностной волны, когда поверхностные импедансы равны для эванесцентных волн по обе стороны границы, затухающих в направлениях от границы двух сред. При этом описываемое нами безотражательное прохождение Брюстера соответствует равенству поверхностных импедансов для эванесцентных волн, затухающих в одном и том же направлении. Для плоских границ двух сред было теоретически показано, что эффект Брюстера для эванесцентных волн может иметь место как для  $p$ -, так и для  $s$ - поляризации, причем только если хотя бы одна из двух граничащих сред обладает магнитными свойствами ( $\mu \neq 1$ ). На основе рассмотренного эффекта безотражательного прохождения Брюстера предложен метод настройки фазового распределения волны, испытавшей полное отражение, в плоскости отражающей поверхности, притом что данное фазовое распределение превращается в однородное при условии безотражательного прохождения Брюстера.

**Ключевые слова:** эффект Брюстера, эванесцентная волна, ближнее поле, магнитоэлектрик, поверхностная волна

# МОДЕРНИЗАЦИЯ ЗВЕЗДООБРАЗНОЙ КРОМКИ КОЛЛИМАТОРА МАРК-12

Балабуха Н.П.<sup>1</sup>, Зубов А.С.<sup>1</sup>, Меньших Н.Л.<sup>1</sup>, Солосин В.С. \*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 24.03.2023

Одобрена после рецензирования 28.03.2023

Принята к публикации 31.05.2023

## Аннотация

Рассмотрена задача об оптимизации звездообразной кромки коллиматора МАРК-12. Звездообразная кромка или отогнутый край зеркала используются для того, чтобы уменьшить влияние дифракционных эффектов на распределение поля в рабочей зоне коллиматора. В настоящее время широкое внедрение получили зубцы с криволинейными ребрами, которые при той же высоте обеспечивают более равномерное распределение поля в рабочей зоне компактного полигона. В модельной задаче дифракции на двумерном коллиматоре путем перебора была найдена форма профиля зубцов, обеспечивающая наилучшее распределение поля. Расчет дифракции в модельной задаче выполнялся методом интегральных уравнений. Было отмечено, что распределения полей в модельной задаче сильно зависят от поляризации падающей волны как для зубцов с прямолинейными, так и с криволинейными ребрами. Затем был рассмотрен ряд вариантов расположения зубцов с оптимизированной формой ребер по краю параболической части коллиматора МАРК-12. Методом физической оптики была проведена оценка распределения полей в рабочей зоне коллиматора. Показано, что модификация формы звездообразной кромки позволит уменьшить неравномерность распределения поля в рабочей зоне коллиматора на 0,6 дБ в низкочастотной части диапазона при сохранении габаритных размеров зеркала.

**Ключевые слова:** компактный полигон, коллиматор, рабочая зона, распределение поля, звездообразная кромка

EDN RTOOCF

---

## Введение

Компактный полигон – это универсальный измерительный комплекс, позволяющий проводить измерения рассеивающих свойств объектов и параметров антенн. Основой компактного полигона является коллиматор, обычно зеркальный. Точность измерений в компактном полигоне определяется неравномерностью распределения поля в его рабочей зоне [1], которая в значительной степени зависит от точности изготовления поверхности и формы кромки зеркала коллиматора.

Чтобы уменьшить влияние дифракционных эффектов на распределение поля в рабочей зоне, края зеркала коллиматора дополняют поглощающим материалом, используют фасонные окончания в виде зубцов или в виде плавного отгиба края [2–5]. Наиболее популярными направлениями остаются использование звездообразной кромки зеркала и плавного отгиба края. Большой интерес представляют зубцы с криволинейными ребрами, которые при той же высоте обеспечивают более равномерное распределение поля в рабочей зоне компактного полигона [6].

В компактном полигоне ИТПЭ РАН используется коллиматор МАРК-12, контур которого выполнен в виде звездообразной кромки из зубцов с прямолинейными ребрами. Целью настоящей работы является разработка новой формы звездообразной кромки с использованием зубцов с криволинейными ребрами.

---

\* Автор, ответственный за переписку: Владимир Сергеевич Солосин, svsl5105@yandex.ru

## Выбор формы лепестков

При разработке новой формы звездообразной кромки учитывалась необходимость сохранения габаритных размеров коллиматора (рисунок 1), так как размеры безэховой камеры заданы и должны остаться неизменными. Увеличение длины зубцов и, следовательно, габаритных размеров коллиматора естественным образом приводит к улучшению качества распределения поля в рабочей зоне. Однако рассеянные контуром коллиматора электромагнитные волны, отражаясь от близко расположенных стенок безэховой камеры, попадают в рабочую зону компактного полигона, что приводит к увеличению неравномерности распределения амплитуды поля.

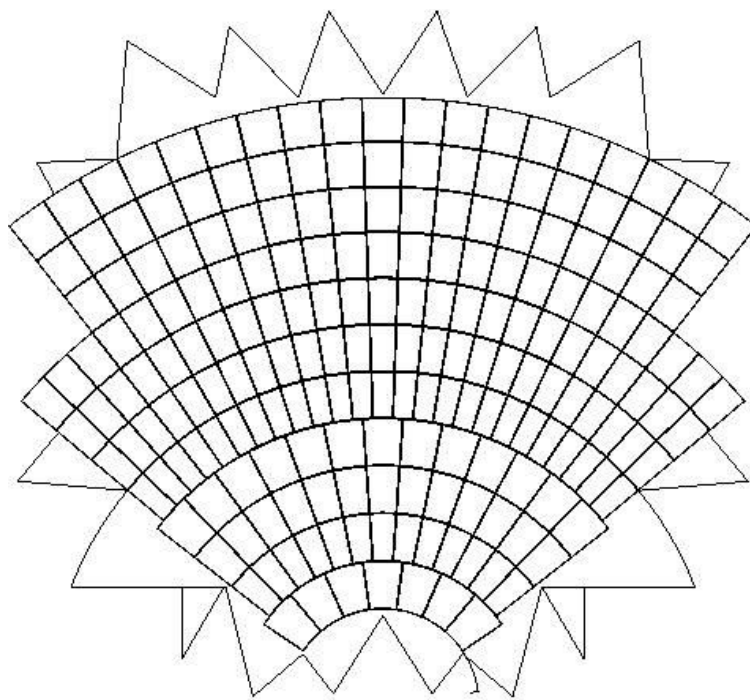


Рисунок 1 – Внешний вид рефлектора коллиматора МАРК-12

Задача модернизации формы звездообразной кромки рефлектора коллиматора решалась в два этапа. Первоначально был найден профиль ребер зубцов, который обеспечивает наилучшее распределение поля в рабочей зоне двумерного коллиматора, схематически изображенного на рисунке 2. В данной задаче двумерный коллиматор представляет собой бесконечную периодическую структуру из металлических пластин с зубцами. Параметры двумерной структуры следующие: период  $P$  (размер основания зубца) равен 0,8 м, высота зубца  $H$  – 1 м, ширина «зеркала»  $W$  – 4 м.

Плоская волна падает на рассматриваемую структуру (волновой вектор перпендикулярен плоскости чертежа, рисунок 2). На расстоянии 5 м рассчитывается распределение поля, отраженное периодической структурой. Расчет проводился на частоте 1,5 ГГц при вертикальной и горизонтальной поляризации падающей волны. На этой частоте размер зубца составляет 5 длин волн, что примерно соответствует размеру зубца коллиматора МАРК-12 на нижней частоте рабочего диапазона, где влияние дифракционных эффектов особенно заметно. Результаты расчета распределения поля для структуры с зубцами с прямолинейными ребрами представлены на рисунке 3. Расчет выполнен методом интегральных уравнений.

Из графика видно, что неравномерность распределения амплитуды поля зависит от поляризации, при этом для горизонтальной поляризации эта величина составляет 3,8 дБ. После нескольких итераций был подобран профиль ребер зубцов, при котором была достигнута минимальная неравномерность распределения амплитуды поля. Результаты расчета распределения поля для структуры с зубцами с криволинейными ребрами представлены на рисунке 4.

Для случая с криволинейными зубцами неравномерность распределения амплитуды поля также зависит от поляризации, при этом для горизонтальной поляризации эта величина составляет 3,44 дБ. Таким образом ожидаемый выигрыш от использования зубцов с профилированными ребрами может составить примерно 0,36 дБ.

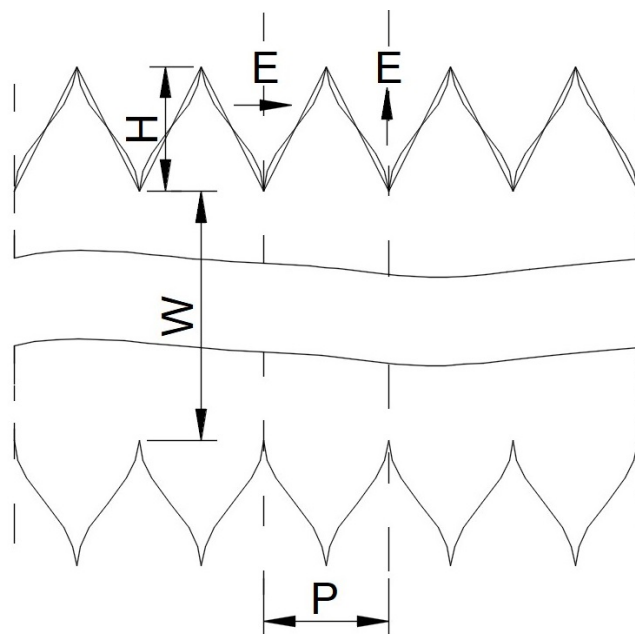


Рисунок 2 – Модель двумерного коллиматора на основе бесконечной периодической структуры из металлических пластин с зубцами разной формы

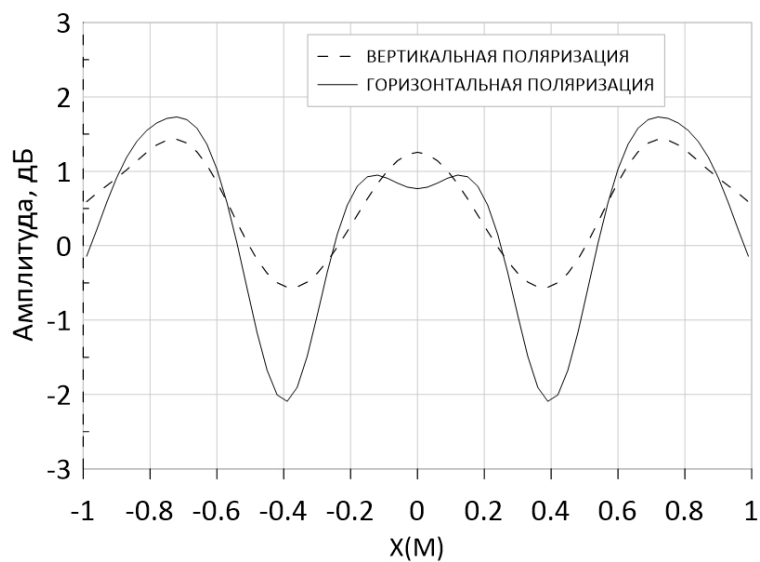


Рисунок 3 – Распределение амплитуды поля в рабочей зоне модельного двумерного коллиматора с зубцами с прямолинейными ребрами

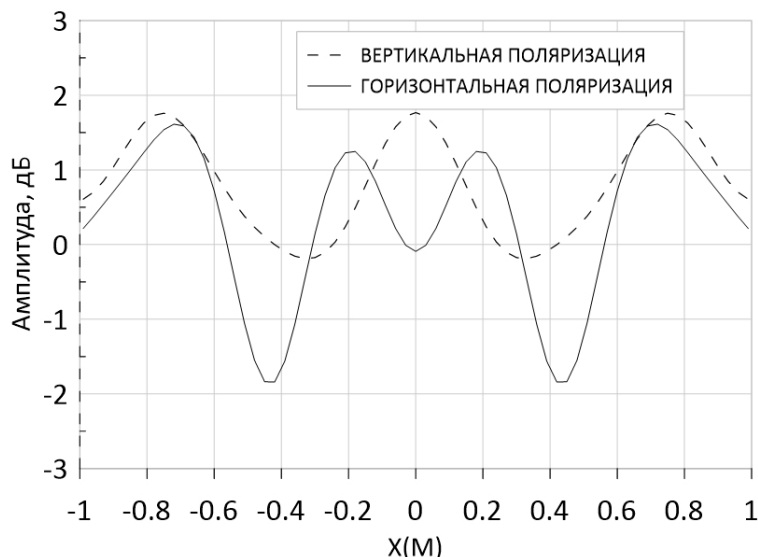


Рисунок 4 – Распределение амплитуды поля в рабочей зоне модельного двумерного коллиматора с зубцами с криволинейными ребрами

### Коллиматор с модернизированными лепестками

Конечной целью является анализ распределения поля, сформированного коллиматором с модернизированной звездообразной кромкой. Учитывая возможности вычислительных ресурсов, расчет выполнялся в приближении физической оптики с помощью программного комплекса для электромагнитного моделирования ФЕКО на нижней частоте рабочего диапазона коллиматора (1 ГГц). Для рассмотрения различных вариантов размеров и форм профиля контура рефлектора была разработана программа, которая дополняет основное зеркало коллиматора зубцами с оптимизированной формой профиля.

Для анализа качества распределения амплитуды поля использовались данные, попавшие в рабочую зону - круг диаметром 6 м. Далее при анализе отбрасывается 5% точек с максимальным отклонением, чтобы получить неравномерность распределения поля в заданной области с достоверностью 95%.

После последовательных уточнений формы профиля звездообразной кромки неравномерность распределения амплитуды поля в рабочей зоне диаметром 6 м снизилась до  $\pm 0,81$  дБ, что на 0,6 дБ меньше, чем для исходного варианта профиля кромки действующего коллиматора МАРК-12 при тех же габаритах рефлектора. Внешний вид коллиматора с модернизированной звездообразной кромкой показан на рисунке 5.

### Заключение

В работе предложен алгоритм для оптимизации криволинейного профиля зубца. Решена задача построения оптимального звездообразного контура коллиматора МАРК-12. Показано, что, при сохранении параболической части зеркала и общих габаритов коллиматора, зеркало с оптимизированной звездообразной кромкой обеспечивает уменьшение неравномерности распределения амплитуды поля в рабочей зоне на нижних частотах рабочего диапазона на 0,6 дБ.

### Список литературы

- [1] Компактные полигоны для измерений характеристик рассеяния объектов. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. - М.: Наука, 2007. 266 с.
- [2] I. J. Gupta, K. P. Ericksen, W.D. Burnside. A Method to Design Blended Rolled Edges for Compact Range Reflectors. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. V. 38, No. 6, June 1990.
- [3] T. Lee, W.D. Burnside. Performance Trade-Off Between Serrated Edge And Blended Rolled Edge Compact Range Reflectors. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, V. 44, No. 1, January 1996.



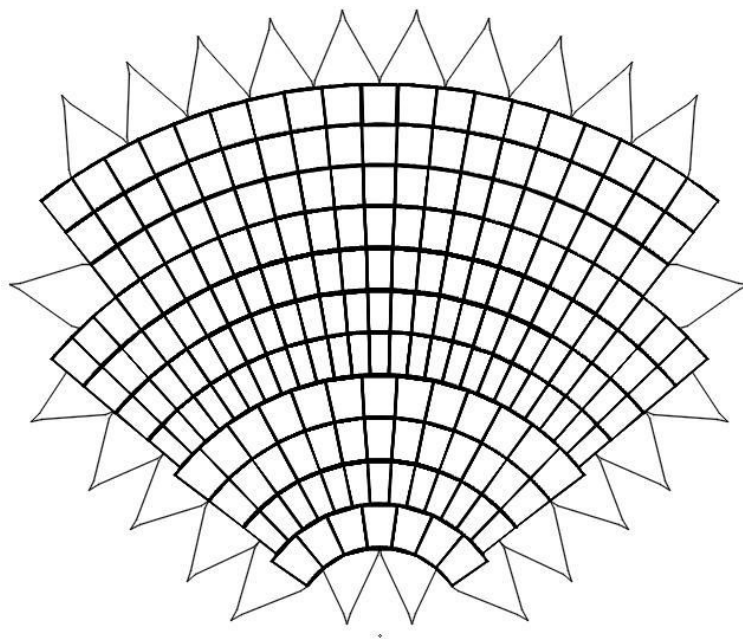


Рисунок 5 – Внешний вид рефлектора коллиматора с модернизированной звездообразной кромкой

- [4] A. M. Munos-Acevedo, M. Sierra-Castaner. An Efficient Hybrid GO-PWS Algorithm to Analyze Conformal Serrated-Edge Reflectors for Millimeter-Wave Compact Range. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. V. 60, No. 2, February 2012.
- [5] Shaohui Quan. Compact Range Performance Evaluation Using Aperture Near-Field Angular Spectrums. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, V. 61, No. 5, May 2013.
- [6] J. Hartman, D. Fasold. Advanced Serration Design For Compact Range With UDT // *AMTA Conference 2000*, pp.460-465.

---

## MODERNIZATION OF THE SERRATED EDGE OF THE MARK-12 COLLIMATOR

Balabukha N.P.<sup>1</sup>, Zubov A.S.<sup>1</sup>, Menshikh N.L.<sup>1</sup>, Solosin V.S.<sup>1\*</sup>,

<sup>1</sup> Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics of RAS, Moscow, Russia

\* sv515105@yandex.ru

### Abstract

The problem of optimizing the serrated edge of the collimator MARK-12 is considered. The serrated or rolled edge of the mirror is used to reduce the influence of diffraction effects on the field distribution in the quiet zone of the collimator. Currently, teeth with curved edges have been widely introduced, which, at the same height, provide a more uniform distribution of the field in the quiet zone of a compact ranges. Using model of the two-dimensional collimator, the shape of the tooth profile was found by iteration, which provides the best smoothness of the field distribution in the quiet zone. The calculation of the diffraction problem was performed by the method of integral equations. It was shown that the field distributions in the model problem strongly depend on the polarization of the incident wave for both serrations with rectilinear and curved edges. Then a number of options for the arrangement of serrations with an optimized shape of the edges on the edge of the parabolic part of the collimator MARK-12 were considered. The physical optics method was used to evaluate the distribution of fields in the quiet zone of the collimator. It was shown that the modification of the shape of the serrated edge will reduce the nonuniformity of the field distribution in the quiet zone of the collimator by 0.6 dB in the low-frequency part of the range while maintaining the overall dimensions of the mirror.

**Key words:** compact range, reflector, quiet zone, field distribution, serrated edge

---

# МОДЕЛЬ ВОЛОКОННОГО ЭРБИЕВОГО УСИЛИТЕЛЯ ДЛЯ АНАЛИЗА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА И ШУМОВ

Дорофеев А.В. \*<sup>1,2,3</sup>, Нечепуренко И.А.<sup>1</sup>, Базакуца А.П.<sup>3</sup>, Бутов О.В.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», Москва, Россия

<sup>2</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>3</sup> Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 30.05.2023

Одобрена после рецензирования 30.05.2023

Принята к публикации 31.05.2023

## Аннотация

Предложена модель эрбиевого волоконного усилителя, учитывающая основные процессы спонтанного и индуцированного излучения. Рассматривается неоднородное распределение вдоль оси волокна мощности накачки, полезного сигнала и шума. Проводится оценка величины шумов спонтанного излучения.

**Ключевые слова:** волоконные усилители, эрбиевые усилители, трехуровневая система, скоростные уравнения

EDN QZLXZH

## 1. Введение

Волоконные усилители и лазеры на основе кварцевого стекла, легированного эрбием, активно используются в современной волоконной оптике [1–6]. Эрбиевые усилители и лазеры, работающие на длинах волн около 1,5 мкм, используются в телекоммуникациях [7–11], оптическом зондировании [12–14] и радиофотонике [15, 16]. Особый интерес представляют одночастотные волоконно-оптические лазерные системы с узкой (порядка нескольких кГц) линией генерации [17–21], которые могут служить маломощными когерентными источниками в линиях связи со сверхвысокой плотностью каналов и в когерентной связи, а также в системах оптического зондирования. Для передачи сигналов на большие расстояния очень важна возможность усиления сигнала без существенного зашумления. Наиболее распространены усилители на основе волокон, допированных ионами эрбия [22, 23].

В рамках данной работы предложена модель эрбиевого волоконного усилителя, учитывающая основные процессы спонтанного и индуцированного излучения. Учитывается неоднородное распределение вдоль оси волокна мощности накачки, полезного сигнала и шума. Проводится оценка величины шумов спонтанного излучения.

## 2. Модель трехуровневой активной среды

Рассмотрим волоконный усилитель, в котором в качестве усиливающей среды выступает трехуровневая система (рис. 1). Накачка осуществляется путем перевода атома из основного состояния «1» в возбужденное состояние «3». Далее происходит быстрый по сравнению со всеми процессами, происходящими в системе, переход атома из состояния «3» в состояние «2».

Для описания ансамбля из многих атомов вводятся усредненные населенности уровней «1», «2», «3», которые определяются как отношение количества атомов в соответствующем состоянии  $N_i$  к полному числу атомов  $N$ :

$$n_i = N_i/N.$$

\* Автор, ответственный за переписку: Александр Викторович Дорофеев, adorofeenko@itae.ru

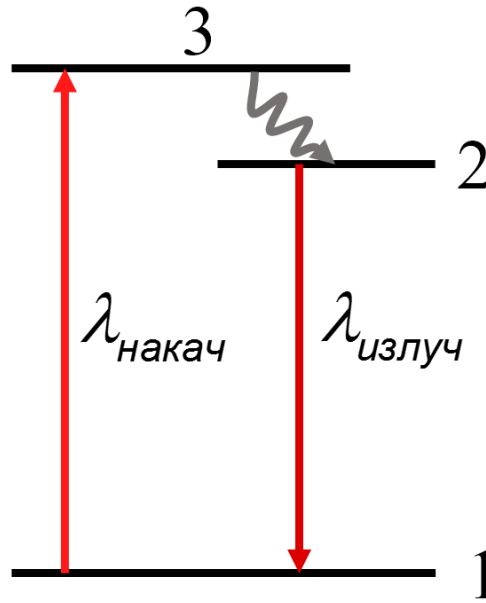


Рисунок 1 – Схема активной среды, имеющей три энергетических уровня

В лазерах на основе твердотельной накачки число атомов активной среды можно считать неизменным, поэтому  $N_1 + N_2 + N_3 = N$ , откуда следует уравнение для населенностей:

$$n_1 + n_2 + n_3 = 1.$$

Переходы между различными уровнями происходят за счет спонтанных, индуцированных и безызлучательных переходов. Введем вероятности переходов между уровнями в единицу времени (скорости переходов)

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_{j \neq i} (W_{ji}^{cn} + W_{ji}^{und} + W_{ji}^{без}) n_j - \sum_{j \neq i} (W_{ij}^{cn} + W_{ij}^{und} + W_{ij}^{без}) n_i,$$

где  $W_{ij}^{cn}$ ,  $W_{ij}^{und}$  и  $W_{ij}^{без}$  – скорости спонтанного, индуцированного и безызлучательного переходов из состояния  $i$  в состояние  $j$  соответственно.

В случае трехуровневой системы вероятности большей части переходов полагают равной нулю. Вероятность безызлучательного перехода отлична от нуля для переходов  $3 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 1$ . Индуцированные и спонтанные переходы происходят между уровнями 1, 3 и 1, 2. В результате систему уравнений можно упростить:

$$\frac{dn_1}{dt} = (W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{без}) n_2 + (W_{31}^{cn} + W_{31}^{und}) n_3 - (W_{12}^{und} + W_{13}^{und}) n_1, \quad (1)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = W_{12}^{und} n_1 + W_{32}^{без} n_3 - (W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{без}) n_2, \quad (2)$$

$$\frac{dn_3}{dt} = W_{13}^{und} n_1 - W_{31}^{cn} n_3 - W_{31}^{und} n_3 - W_{32}^{без} n_3. \quad (3)$$

В случае, когда безызлучательные переходы с 3-го на 2-й уровень происходят быстрее любых других процессов  $W_{31}^{und} \ll W_{32}^{без}$ :

$$\frac{dn_1}{dt} = (W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{без}) n_2 - W_{12}^{und} n_1 - W_{13}^{und} n_1, \quad (4)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = W_{12}^{und} n_1 + W_{32}^{без} n_3 - (W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{без}) n_2, \quad (5)$$

$$\frac{dn_3}{dt} = W_{13}^{und} n_1 - W_{32}^{\beta es} n_3 \quad (6)$$

Быстрый переход из состояния «3» в состояние «2» приводит к тому, что  $n_3 \ll n_1$ . Вероятность перехода  $W_{13}^{und}$  зависит от мощности накачки, которая, вообще говоря, может зависеть от времени, поэтому уравнение на инверсию населенности «3» представляет собой уравнение с переменным коэффициентом. Для упрощения уравнения сделаем замену переменных  $n_3(t) = \tilde{n}_3(t) e^{-W_{32}^{\beta es} t}$ :

$$\frac{d\tilde{n}_3}{dt} = e^{W_{32}^{\beta es} t} W_{13}^{und} n_1.$$

Решением этого уравнения является

$$\tilde{n}_3(t) = \int_0^t e^{W_{32}^{\beta es} t} W_{13}^{und}(t) n_1(t) dt + C,$$

где  $C$  – константа, определяющая населенность уровня «3» в отсутствие накачки. Населенность верхнего уровня в волоконных усилителях пренебрежимо мала в силу малости тепловых флуктуаций по сравнению с энергией перехода  $kT \ll \hbar\omega$ , поэтому  $C = 0$ . В результате получим искомую населенность:

$$n_3(t) = e^{-W_{32}^{\beta es} t} \int_0^t e^{W_{32}^{\beta es} t} W_{13}^{und} n_1 dt.$$

С учетом большой скорости безызлучательных переходов между уровнями «3» и «2»  $W_{32}^{\beta es} \gg W_{13}^{und}$  находим:

$$n_3(t) \approx \frac{W_{13}^{und}}{W_{32}^{\beta es}} n_1.$$

Из найденного выражения явно следует, что  $n_3 \ll n_1$ . В результате система уравнений, описывающая трехуровневую активную среду, приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= (W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{\beta es}) n_2 - W_{12}^{und} n_1 - W_{13}^{und} n_1, \\ \frac{dn_2}{dt} &= W_{12}^{und} n_1 + W_{13}^{und} n_1 - (W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{\beta es}) n_2. \end{aligned}$$

При постоянной накачке в стационарном режиме эта система преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{W_{21}^{cn} + W_{21}^{und} + W_{21}^{\beta es}}{W_{12}^{und} + W_{13}^{und}} n_2, \\ n_2 &= \frac{W_{12}^{und} + W_{13}^{und}}{W_{21}^{und} + W_{21}^{cn} + W_{21}^{\beta es}} n_1. \end{aligned}$$

Получились два одинаковых уравнения, что обусловлено сохранением частиц:  $n_1 + n_2 = 1$ . С учетом этого условия находим:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{W_{21}^{und} + W_{21}^{cn} + W_{21}^{\beta es}}{W_{21}^{und} + W_{21}^{cn} + W_{21}^{\beta es} + W_{12}^{und} + W_{13}^{und}}, \\ n_2 &= \frac{W_{12}^{und} + W_{13}^{und}}{W_{21}^{und} + W_{21}^{cn} + W_{21}^{\beta es} + W_{12}^{und} + W_{13}^{und}}. \end{aligned}$$

Заметим, что скорости индуцированных переходов равны и пропорциональны интенсивности падающего поля:

$$W_{21}^{und} = W_{12}^{und} = \alpha_2 I_{21},$$

$$W_{13}^{und} = \alpha_3 I_{нак}.$$

Здесь  $I_{21}$  – интенсивность (объемная плотность энергии) излучения на частоте перехода «2» в «1»,  $I_{нак}$  – интенсивность накачки,  $\alpha_i$  – коэффициенты пропорциональности между интенсивностью падающей волны и скоростью перехода, которые можно найти, как коэффициенты Эйнштейна. Скорость спонтанного излучения  $W_{21}^{cn}$  обозначим как

$$W_{21}^{cn} \equiv \gamma_1.$$

Скорость безызлучательных переходов обычно в несколько раз меньше, чем скорость спонтанных переходов. Суммарную скорость перехода атома из возбужденного состояния в основное обозначим как  $\gamma_0 = W_{21}^{cn} + W_{21}^{бес}$ . Отношение скорости спонтанного излучения к общей скорости перехода из возбужденного состояния в основное называют квантовой эффективностью  $\eta = W^{cn} / (W^{cn} + W^{бес})$ . Тогда скорость безызлучательных переходов может быть выражена через скорость спонтанных переходов и квантовую эффективность как  $W_{21}^{бес} = (1 - \eta) \gamma_0$ .

С учетом этих обозначений решения могут быть представлены в виде:

$$n_1 = \frac{\alpha_2 I_{21} + \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}}$$

$$n_2 = \frac{\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}}$$

Инверсия населенности  $D = n_2 - n_1$ :

$$D = \frac{\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}}.$$

В отсутствие сигнала при малой накачке  $D = -1$ , а при стремлении накачки к бесконечности  $D \rightarrow 1$ .

### 3. Распространение сигнала в активном волноводе

Рассмотрим сначала задачу о распространении сигнала с начальной интенсивностью  $I$  по однородной активной среде длиной  $\Delta l$  (рис. 2).

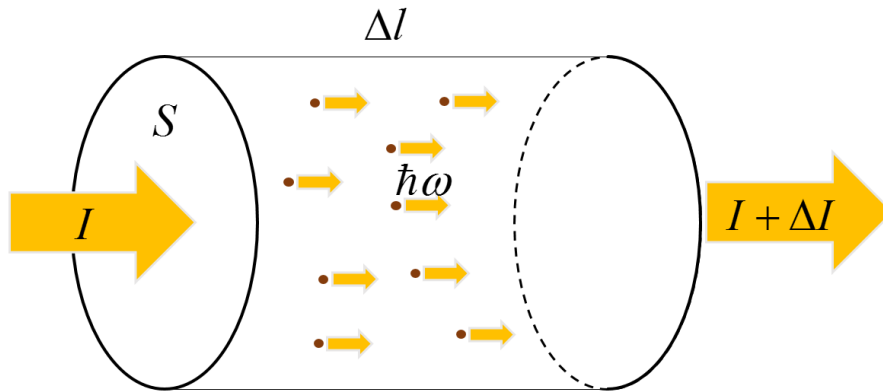


Рисунок 2 – Усиление сигнала за счет индуцированных переходов в малом объеме

На выходе из активной среды интенсивность сигнала составит  $I + \Delta I$ , где  $\Delta I$  обеспечено индуцированными переходами в среде. Время распространения сигнала по активной среде составляет  $\Delta l = v_{gp} \Delta t$ , где  $v_{gp}$  – групповая скорость. За данное время будет излучена энергия,  $\Delta E = N \times D \times \hbar\omega \alpha_2 I_{cu2} \Delta t$ , где  $N$  – число атомов в рассматриваемом объеме. Таким образом:

$$\Delta I = \frac{\Delta E}{S \Delta l} v_{gp} = n_a \times D \times \hbar\omega \alpha_2 I_{cu2} \Delta l.$$

При переходе к пределу малых  $\Delta l$  получим уравнение на интенсивность сигнала:

$$\frac{dI_{cu2}}{dz} = n_a D \hbar\omega \alpha_2 I_{cu2}.$$

Используя найденное выше выражение для инверсной населенности, получим нелинейное уравнение, описывающее распространение сигнала в однородной активной среде:

$$\frac{dI_{cu2}}{dz} = n_a \frac{\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{cu2} + \alpha_3 I_{нак}} \hbar\omega \alpha_2 I_{cu2}.$$

Здесь мы считали, что интенсивность на частоте перехода полностью определяется интенсивностью сигнала  $I_{21} = I_{cu2}$ , т.е. пренебрегали спонтанным излучением. Учет спонтанного излучения мы произведем в следующем разделе.

Для анализа экспериментальных данных необходимо перейти к терминам мощности. В общем случае для пересчета из интенсивности в мощность необходимо учесть неоднородность распределения ионов эрбия и неоднородность интенсивности фундаментальной моды:

$$\frac{dP_{cuз}}{dz} = \int n_a(\vec{r}) \frac{\alpha_3 I_{нак}(\vec{r}) - \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{cuз}(\vec{r}) + \alpha_3 I_{нак}(\vec{r})} \hbar\omega\alpha_2 I_{cuз}(\vec{r}) dS.$$

Концентрацию ионов эрбия в сердцевине  $n_a$  и распределение интенсивности поля накачки и сигнала в сердцевине (с учетом малой разницы показателей преломления сердцевины и оболочки) можно приближенно считать постоянными. Тогда в пределах сердцевины:

$$n_a(\vec{r}) = n_a,$$

$$I_{нак}(\vec{r}) = \frac{\rho_{нак} P_{нак}}{\pi a^2},$$

$$I_{cuз}(\vec{r}) = \frac{\rho_{cuз} P_{cuз}}{\pi a^2}.$$

Здесь  $\rho_{нак}$  – доля поля накачки,  $\rho_{cuз}$  – доля сигнала, распространяющихся в сердцевине. В результате получим:

$$\frac{dP_{cuз}}{dz} = n_a \hbar\omega\alpha_2 \rho_{cuз} \frac{\alpha_3 \rho_{нак} P_{нак} - \gamma_0 \pi a^2}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{cuз} P_{cuз} + \alpha_3 \rho_{нак} P_{нак}} P_{cuз}.$$

Доля мощности в сердцевине волокна может быть вычислена при известном эффективном показателе преломления фундаментальной моды  $n_{эфф}$ :

$$\rho = 1 - \frac{n_c - n_{эфф}}{n_c - n_{об}} \frac{K_1^2(a^2 k_0^2 (n_{эфф} - n_{об}))}{K_0(a^2 k_0^2 (n_{эфф} - n_{об})) K_2(a^2 k_0^2 (n_{эфф} - n_{об}))}.$$

Эффективный показатель преломления фундаментальной моды может быть вычислен путем решения дисперсионного уравнения

$$\frac{J_1(a^2 k_0^2 (n_c - n_{эфф}))}{(n_c - n_{эфф}) J_0(a^2 k_0^2 (n_c - n_{эфф}))} = - \frac{K_1(a^2 k_0^2 (n_{эфф} - n_{об}))}{(n_{эфф} - n_{об}) K_0(a^2 k_0^2 (n_{эфф} - n_{об}))}.$$

#### 4. Шумы спонтанного излучения: расчет из эквивалентной мощности шумов

Распространен метод расчета шумов на основе того факта, что мощность спонтанного излучения равна мощности индуцированного излучения при условии, что в моде находится 1 фотон. Оказывается, наличие энергии  $h\nu$  в каждой моде из диапазона частот  $\nu \div \nu + \Delta\nu$  ( $\Delta\nu$  – окно выходного фильтра) соответствует распространению излучения мощностью

$$P_0 = h\nu\Delta\nu, \tag{7}$$

называемой эквивалентной мощностью шума.

Действительно, рассмотрим отрезок волокна длиной  $L$ . В каждой моде находится энергия  $h\nu$ , соответствующая погонная плотность энергии равна  $\frac{h\nu}{L}$ , а поток энергии –  $\frac{h\nu}{L} \frac{c}{n}$  (здесь  $\frac{c}{n}$  – скорость волны). Моды расположены на расстоянии  $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$  по оси волновых чисел, и они создают поток  $P_0 = \frac{L}{2\pi} \left(\frac{h\nu}{L} \frac{c}{n}\right) \int_{\Delta\nu} \frac{dk}{d\nu} d\nu$ . Заметим, что  $\frac{1}{2\pi} \frac{dk}{d\nu} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c}$ , так что  $P_0 = L \left(\frac{h\nu}{L} \frac{c}{n}\right) \frac{n}{c} \Delta\nu$ . Получаем результат (7).

Эквивалентная мощность не является физически измеримой. Это воображаемая величина, используемая для расчетов спонтанного излучения.

Оценка этой величины для окна  $\Delta\lambda = 0,1$  нм:  $P_0 = h\nu\Delta\nu = \frac{hc^2}{\lambda^3} \Delta\lambda = 1.2 \times 10^{-9}$  Вт = –59 дБм.

#### 5. Шумы, обусловленные спонтанным излучением

Расчет интенсивности спонтанного излучения удобно проводить, исходя из фактического (экспериментально измеренного) времени продольной релаксации с учетом квантовой эффективности излучения.

Полная интенсивность на частоте перехода активной среды  $I_{21}$  складывается из интенсивности сигнала  $I_{cuз}$  и интенсивности шумов  $I_{шум}$ . Интенсивность шумов определяется спонтанными и индуцированными переходами. Усиление шума за счет индуцированных переходов может быть описано теми

же соотношениями, что и усиление сигнала. Описание спонтанного излучения требует учета геометрии системы. Накладывание шума на сигнал происходит с учетом их пространственного разделения. В случае волоконных усилителей детектируется тот шум спонтанного излучения, который распространяется в качестве моды сердцевинки. Шумы, распространяющиеся в виде оболочечных мод, могут быть успешно отфильтрованы. Спонтанное излучение, выходящее за пределы волокна, определяется апертурой оболочки волокна и оказывает наименьшее влияние на выходные шумы.

Эффективно «одномерный» характер поведения излучения в оптических волокнах позволяет упростить описание спонтанного излучения. Заметим, что мощность спонтанного излучения от малого объема составляет  $\Delta P_{cn} = S \Delta l n_a n_2 \hbar \omega \gamma_1$ , где  $n_2$  – населенность верхнего уровня,  $\gamma_1$  – скорость спонтанного излучения. Часть этого излучения попадает в моду сердцевинки. Скорость такого излучения  $\tilde{\gamma}_1$  значительно меньше, чем полная скорость излучения  $\gamma_1$ . Таким образом, прибавка к спонтанному излучению в основную моду составит  $\Delta I_{cn} = \Delta P_{cn}/S = \Delta l n_a n_2 \hbar \omega \tilde{\gamma}_1$ .

Населенность верхнего уровня  $n_2$  может быть выражена через инверсную населенность  $D = n_2 - n_1$  и условие сохранения числа частиц  $n_2 + n_1 = 1$ . В результате  $\Delta I_{cn} = \Delta l n_a \frac{D+1}{2} \hbar \omega \tilde{\gamma}_1$ .

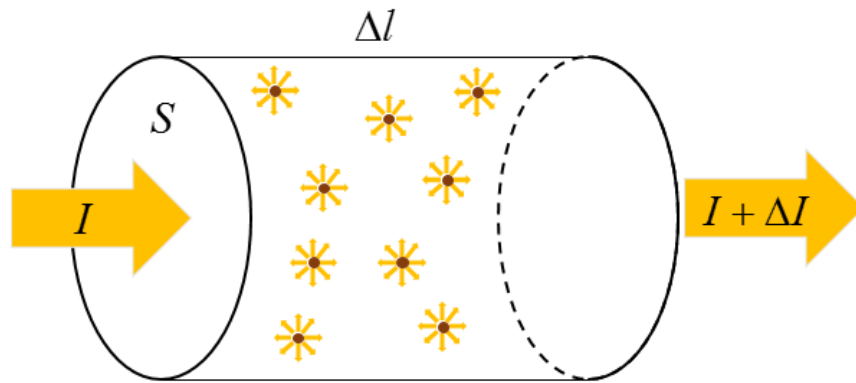


Рисунок 3 – Увеличение интенсивности шумов за счет спонтанных переходов атомов в малом объеме

Таким образом, на выходе из усилителя наблюдается сумма сигнала и шума, и интенсивность такого шума задается уравнением

$$\frac{dI_{шум}}{dz} = n_a D \hbar \omega \alpha_2 I_{шум} + n_a \frac{1+D}{2} \hbar \omega \tilde{\gamma}_1.$$

Кроме того, необходимо учесть, что спонтанное излучение возникает на обоих концах волновода, поэтому полная интенсивность складывается из трех компонент:

$$I_{21} = I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-.$$

Для шумов спонтанного излучения, распространяющихся в обратном направлении, можно также записать уравнение:

$$-\frac{dI_{шум}^-}{dz} = n_a D \hbar \omega \alpha_2 I_{шум}^- + n_a \frac{1+D}{2} \hbar \omega \tilde{\gamma}_1.$$

Заметим, что  $D = \frac{\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}}$ , поэтому

$$\begin{aligned} n_a \frac{\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}} \hbar \omega \alpha_2 I_{шум} + n_a \frac{\alpha_3 I_{нак} + \alpha_2 I_{21}}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}} \hbar \omega \tilde{\gamma}_1 &= \\ = n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0) \alpha_2 I_{шум} + (\alpha_3 I_{нак} + \alpha_2 I_{21}) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 + 2\alpha_2 I_{21} + \alpha_3 I_{нак}}. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом  $I_{21} = I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-$  может быть получена замкнутая система уравнений на интенсивность сигнала и шума в волоконном усилителе:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{сиг}}{dz} &= n_a \hbar \omega \alpha_2 I_{сиг} \frac{\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0}{\gamma_0 + 2\alpha_2 (I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-) + \alpha_3 I_{нак}}, \\ \frac{dI_{шум}^+}{dz} &= n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0) \alpha_2 I_{шум}^+ + (\alpha_3 I_{нак} + \alpha_2 (I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-)) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 + 2\alpha_2 (I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-) + \alpha_3 I_{нак}}, \\ -\frac{dI_{шум}^-}{dz} &= n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 I_{нак} - \gamma_0) \alpha_2 I_{шум}^- + (\alpha_3 I_{нак} + \alpha_2 (I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-)) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 + 2\alpha_2 (I_{сиг} + I_{шум}^+ + I_{шум}^-) + \alpha_3 I_{нак}}. \end{aligned}$$

По аналогии с уравнениями для сигнала перейдем от терминов интенсивности к терминам мощности:

$$I_{\text{нак}}(\vec{r}) = \frac{\rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}{\pi a^2},$$

$$I_{\text{сиг}}(\vec{r}) = \frac{\rho_{\text{сиг}} P_{\text{сиг}}}{\pi a^2},$$

$$I_{\text{шум}}^-(\vec{r}) = \frac{\rho_{\text{шум}} P_{\text{шум}}^-}{\pi a^2},$$

$$I_{\text{шум}}^+(\vec{r}) = \frac{\rho_{\text{шум}} P_{\text{шум}}^+}{\pi a^2}.$$

При условии фильтрации шумов оболочки  $\rho_{\text{шум}} \equiv \rho_{\text{сиг}}$ . С учетом этого факта запишем уравнения на мощность сигнала и шумов:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{сиг}}}{dz} &= n_a \hbar \omega \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} P_{\text{сиг}} \frac{\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} - \gamma_0 \pi a^2}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}, \\ \frac{dP_{\text{шум}}^+}{dz} &= n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} - \gamma_0 \pi a^2) \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} P_{\text{шум}}^+ + \pi a^2 (\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} + \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-)) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}, \\ -\frac{dP_{\text{шум}}^-}{dz} &= n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} - \gamma_0 \pi a^2) \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} P_{\text{шум}}^- + \pi a^2 (\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} + \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-)) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}. \end{aligned}$$

Заметим, что в общем случае интенсивность накачки зависит от координаты. Это приводит к неоднородному усилению вдоль длины усилителя. При малой накачке усилителя в нем могут быть области, в которых сигнал поглощается за счет переходов  $1 \rightarrow 2$ .

## 6. Поглощение мощности накачки

По аналогии с предыдущим, для мощности накачки может быть записано уравнение:

$$\frac{dI_{\text{нак}}}{dz} = (n_3 - n_1) n_a \hbar \omega \alpha_3 I_{\text{нак}}.$$

Заметим, что  $n_3 - n_1 \approx -n_1 = \frac{D-1}{2}$ . В результате уравнение для мощности накачки имеет вид

$$\frac{dI_{\text{нак}}}{dz} = \frac{D-1}{2} n_a \hbar \omega \alpha_3 I_{\text{нак}}.$$

Тогда можем записать  $\frac{dI_{\text{нак}}}{dz} = -n_a \hbar \omega \frac{\gamma_0 + \alpha_2 (I_{\text{сиг}} + I_{\text{шум}}^+ + I_{\text{шум}}^-)}{\gamma_0 + 2\alpha_2 (I_{\text{сиг}} + I_{\text{шум}}^+ + I_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 I_{\text{нак}}} \alpha_3 I_{\text{нак}}$ . В рамках описанного выше приближения уравнение на мощность накачки преобразуется к виду:

$$\frac{dP_{\text{нак}}}{dz} = -n_a \hbar \omega \frac{\gamma_0 \pi a^2 + \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-)}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}} \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}.$$

Таким образом, получены уравнения, описывающие распространение излучения накачки и сигнала в волоконном усилителе. При усилении слабых сигналов основной вклад в шумы вносят внутренние шумы усилителя, определяющиеся усиленным спонтанным излучением.

Полная система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{сиг}}}{dz} &= n_a \hbar \omega \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} P_{\text{сиг}} \frac{\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} - \gamma_0 \pi a^2}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}, \\ \frac{dP_{\text{шум}}^+}{dz} &= n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{шум}} - \gamma_0 \pi a^2) \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} P_{\text{шум}}^+ + \pi a^2 (\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} + \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-)) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}, \\ -\frac{dP_{\text{шум}}^-}{dz} &= n_a \hbar \omega \frac{(\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} - \gamma_0 \pi a^2) \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} P_{\text{шум}}^- + \pi a^2 (\alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}} + \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-)) \tilde{\gamma}_1}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}}, \\ \frac{dP_{\text{нак}}}{dz} &= -n_a \hbar \omega \frac{\gamma_0 \pi a^2 + \alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-)}{\gamma_0 \pi a^2 + 2\alpha_2 \rho_{\text{сиг}} (P_{\text{сиг}} + P_{\text{шум}}^+ + P_{\text{шум}}^-) + \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}} \alpha_3 \rho_{\text{нак}} P_{\text{нак}}. \end{aligned} \tag{8}$$



В качестве граничных условий для данной системы выступают условия на равенство нулю интенсивности шумов на соответствующих концах усилителя и заданное значение интенсивности сигнала на входе в усилитель:

$$P_{сиг}(0) = I_0,$$

$$P_{шум}^+(0) = 0,$$

$$P_{шум}^-(L) = 0,$$

$$P_{нак}(0) = P_{нак}^0.$$

Здесь  $L$  – длина усилителя. Полученная система уравнений позволяет вычислить отношение сигнал/шум ( $P_{сиг}(L)/P_{шум}^+(L)$ ) в произвольном усилителе, в котором активная среда может быть описана трехуровневой схемой. К таким средам относится в том числе активная среда, представляющая собой стекло, легированное ионами эрбия.

## 7. Заключение

Предложена модель волоконного усилителя на основе стекла, допированного ионами эрбия, с учетом спонтанного излучения усиливающих атомов и индуцированного излучения, т.е. усиления сигнала и шумов спонтанного излучения. Модель учитывает пространственную неоднородность излучения накачки, полезного сигнала, а также компонент шума, распространяющихся в обоих направлениях. Проведена оценка интенсивности собственных шумов в волокне.

## Список литературы

- [1] J. Kringlebotn, J.-L. Archambault, L. Reekie, J. Townsend, G. Vienne, D. Payne. Highly-efficient, low-noise grating-feedback Er<sup>3+</sup>:Yb<sup>3+</sup> codoped fibre laser. *Electronics Letters* 30, 972-973 (1994).
- [2] A. Bellemare. Continuous-wave silica-based erbium-doped fibre lasers. *Progress in Quantum Electronics* 27, 211-266 (2003).
- [3] D. Brida, G. Krauss, A. Sell, A. Leitenstorfer. Ultrabroadband Er: fiber lasers. *Laser & Photonics Reviews* 8, 409-428 (2014).
- [4] P.D. Dragic, M. Cavillon, J. Ballato. Materials for optical fiber lasers: A review. *Applied Physics Reviews* 5, 041301 (2018).
- [5] C. Shang, Y. Zhang, H. Qin, B. He, C. Zhang, J. Sun, J. Li, J. Ma, X. Ji, L. Xu. Review on wavelength-tunable pulsed fiber lasers based on 2D materials. *Optics & Laser Technology* 131, 106375 (2020).
- [6] T. Jiang, K. Yin, C. Wang, J. You, H. Ouyang, R. Miao, C. Zhang, K. Wei, H. Li, H. Chen. Ultrafast fiber lasers mode-locked by two-dimensional materials: review and prospect. *Photonics Research* 8, 78-90 (2020).
- [7] U. Keller. Recent developments in compact ultrafast lasers. *Nature* 424, 831 (2003).
- [8] D. Wei, T. Li, Y. Zhao, S. Jian. Multiwavelength erbium-doped fiber ring lasers with overlap-written fiber Bragg gratings. *Optics letters* 25, 1150-1152 (2000).
- [9] S. Kim, J. Park, S. Han, Y.-J. Kim, S.-W. Kim. Coherent supercontinuum generation using Er-doped fiber laser of hybrid mode-locking. *Optics letters* 39, 2986-2989 (2014).
- [10] S. Zhu, L. Shi, B. Xiao, X. Zhang, X. Fan. All-optical tunable microlaser based on an ultrahigh-Q erbium-doped hybrid microbottle cavity. *ACS Photonics* (2018).
- [11] J. Rönn, L. Karvonen, C. Kauppinen, A.P. Perros, N. Peyghambarian, H. Lipsanen, A. Säynätjoki, Z. Sun. Atomic layer engineering of Er-ion distribution in highly doped Er: Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> for photoluminescence enhancement. *ACS Photonics* 3, 2040-2048 (2016).
- [12] Y. Gong, Y.-J. Rao, Y. Guo, Z.-L. Ran, Y. Wu. Temperature-insensitive micro Fabry-Perot strain sensor fabricated by chemically etching Er-doped fiber. *IEEE Photonics Technology Letters* 21, 1725-1727 (2009).
- [13] R.A. Pérez-Herrera, M.A. Quintela, M. Fernández-Vallejo, A. Quintela, M. López-Amo, J.M. López-Higuera. Stability comparison of two ring resonator structures for multiwavelength fiber lasers using highly doped Er-fibers. *Journal of Lightwave Technology* 27, 2563-2569 (2009).

- [14] S. Zheng, M. Ghandehari, J. Ou. Photonic crystal fiber long-period grating absorption gas sensor based on a tunable erbium-doped fiber ring laser. *Sensors and Actuators B: Chemical* 223, 324-332 (2016).
- [15] Y.-N. Tan, L. Jin, L. Cheng, Z. Quan, M. Li, B.-O. Guan. Multi-octave tunable RF signal generation based on a dual-polarization fiber grating laser. *Optics express* 20, 6961-6967 (2012).
- [16] M. Guionie, L. Frein, F. Bondu, A. Carré, G. Loas, E. Pinsard, B. Cadier, M. Alouini, M. Romanelli, M. Vallet, "Dual-polarization DFB fiber lasers as optical phase-locked microwave sources in the 1-10 GHz range," in *Fiber Lasers and Glass Photonics: Materials through Applications*, 2018, p. 106832G.
- [17] K. Iwatsuki, H. Okamura, M. Saruwatari. Wavelength-tunable single-frequency and single-polarisation Er-doped fibre ring-laser with 1.4 kHz linewidth. *Electronics Letters* 26, 2033-2035 (1990).
- [18] G. Ball, W. Morey. Compression-tuned single-frequency Bragg grating fiber laser. *Optics letters* 19, 1979-1981 (1994).
- [19] V. Mizrahi, D.J. DiGiovanni, R.M. Atkins, S.G. Grubb, Y.-K. Park, J.-M. Delavaux. Stable single-mode erbium fiber-grating laser for digital communication. *Journal of Lightwave technology* 11, 2021-2025 (1993).
- [20] X. Dong, N.Q. Ngo, P. Shum, H.-Y. Tam, X. Dong. Linear cavity erbium-doped fiber laser with over 100 nm tuning range. *Optics express* 11, 1689-1694 (2003).
- [21] S. Popov, O. Butov, A. Bazakutsa, M.Y. Vyatkin, Y.K. Chamorovskii, A. Fotiadi. Random lasing in a short Er-doped artificial Rayleigh fiber. *Results in Physics* 16, 102868 (2020).
- [22] R.J. Mears, L. Reekie, I. Jauncey, D.N. Payne. Low-noise erbium-doped fibre amplifier operating at 1.54  $\mu\text{m}$ . *Electronics Letters* 19, 1026-1028 (1987).
- [23] A. Naji, B.A. Hamida, X. Cheng, M.A. Mahdi, S. Harun, S. Khan, W. Al-Khateeb, A. Zaidan, B. Zaidan, H. Ahmad. Review of erbium-doped fiber amplifier. *International Journal of the Physical Sciences* 6, 4674-4689 (2011).

## MODEL OF ERBIUM FIBER AMPLIFIER FOR AN ANALYSIS OF PROPAGATION OF SIGNAL AND NOISE

Dorofeenko A.V.<sup>1,2,3\*</sup>, Nechepurenko I.A.<sup>1</sup>, Bazakutsa A.P.<sup>3</sup>, Butov O.V.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics of RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Moscow institutes of physics and technology, Moscow region, Russia

<sup>3</sup> Institute of Radio Engineering and Electronics named after V.A. Kotelnikov RAS, Moscow, Russia

\* adorofeenko@itae.ru

### Abstract

A model of an erbium fiber amplifier is proposed that takes into account main processes of spontaneous and induced emission. A nonuniform pump power, signal, and noise distribution along the fiber is taken into account. An estimate is made of the magnitude of spontaneous emission noise.

**Key words:** fiber amplifiers, erbium amplifiers, three-level system, rate equations

# КВАНТОВАНИЕ ПЛАЗМОНА

Андрианов Е.С.<sup>1,2</sup>, Виноградов А.П. \*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Федеральное государственное унитарное предприятие "Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова", Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 17.03.2023

Одобрена после рецензирования 30.05.2023

Принята к публикации 31.05.2023

## Аннотация

Рассмотрен алгоритм квантования квазистатических полей.

**Ключевые слова:** плазмон, квантование квазистатических полей

EDN VPQTQD

Потребность в увеличении скорости обработки и передачи информации во многом определяет тенденции развития современной прикладной науки и технологий. В последнее время большие надежды для решения этой проблемы возлагаются на использование квантовых алгоритмов. Последние требуют умения управлять квантованными полями.

Однако наряду с улучшением применяемых алгоритмов немаловажным остается и вопрос об увеличении скорости исполнения каждого отдельного шага алгоритма. Так как наиболее быстрые процессы передачи информации связаны с электромагнитными полями, то одним из ограничений на этом пути увеличения производительности конкретного устройства является конечная скорость света. Иными словами, чем меньше устройство, тем быстрее оно может работать. В идеале размер устройства должен быть сравним с длиной волны. Здесь мы сталкиваемся с необходимостью описания квантовых свойств полей на субволновых масштабах.

Основным отличием классической и квантовой механики является дискретность многих величин в квантовой механике (КМ). Это объясняет одинаковость многих квантовых объектов. Абсолютно одинаковыми (неразличимыми) могут быть только дискретные величины. В классической физике наиболее близки в этом смысле свойства полей в различных резонаторах. Собственно, из этой аналогии при попытке описать дискретные уровни квантовых систем и выросла КМ.

Обычно в КМ квантуются линейные, гармонически изменяющиеся во времени поля. Основным допущением является утверждение о том, что любое поле можно представить как суперпозицию абсолютно одинаковых мод. Для выделения мод используют гипотетический ограниченный в пространстве объем с заданными на его внутренней поверхности эрмитовыми граничными условиями [1]. Для обобщения полученного ответа на случай безграничного пространства переходят к пределу  $V \rightarrow \infty$ . Иными словам, переходят от рядов Фурье к интегралам.

Зачем же тогда нужен предварительный этап мод? Почему сразу не работать с непрерывными полями, как это делают в электродинамике? Ответ в том, что описание полей не есть сама цель. Обычно поля играют роль внешней силы. И здесь важным оказывается квантовая природа полей и часто нелинейность материальных объектов взаимодействия. Широко распространен полуклассический подход, когда поля считаются классическими, а материальный объект (атом или молекула) квантовым. Однако если энергия взаимодействия оказывается сравнимой с энергией поля, возникают явления, выходящие за рамки полуклассического описания. Нужно учитывать дискретность порций передаваемой энергии, квантов.

Напомним основные моменты квантования ЭМ полей в вакууме. Рассмотрим в качестве объема квантования куб объема  $L^3$ . Предполагаем, что электрическое поле удовлетворяет волновому уравнению

\* Автор, ответственный за переписку: Алексей Петрович Виноградов, a-vinogr@yandex.ru

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

а моды будем искать в виде  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_m \exp[-i(\omega_0 t - \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r})]$ , где  $\mathbf{u}_m$  - собственные моды, задачи на собственные значения  $\mathbf{k}_m$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u}_m - k_m^2 \mathbf{u}_m &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_m &= 0, \\ \mathbf{u}_m(r_i + L) &= \mathbf{u}_m(r_i). \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве собственных значений выступают волновые векторы  $\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega_0/c$ , здесь  $\hat{\mathbf{n}} = \{\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z\}$  единичный вектор, направленный параллельно распространению волны. Решение задачи 2 дает следующие значения возможных волновых векторов:

$$\begin{aligned} k_x L &= 2\pi n_x, \\ k_y L &= 2\pi n_y, \\ k_z L &= 2\pi n_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти значения  $\mathbf{k}$  образуют в импульсном пространстве кубическую решетку с шагом  $(2\pi/L)$  так, что на каждую моду приходится объем  $(2\pi/L)^3$ <sup>1</sup>.

Заметим, что задача (2) является эрмитовой, так, что набор собственных функций образует полный базис в соответствующем гильбертовом пространстве [2]. Можно показать, что базис ортонормирован

$$\int_V \mathbf{u}_{m'} \cdot \mathbf{u}_m^* dV = V \delta_{mm'}, \quad (4)$$

а любое периодическое поле частоты  $\omega_0$  можно представить в виде линейной комбинации мод:

$$\mathbf{E} = \sum_m E_m(t) \mathbf{u}_m, \quad \mathbf{B} = \sum_m k_m^{-1} B_m(t) \nabla \times \mathbf{u}_m. \quad (5)$$

Перейдем к квантованию отдельной моды.

Так как поля принимают действительные значения, то (5) заменяется выражениями

$$\mathbf{E}_{re} = \frac{1}{2} \sum_m (E_m(t) \mathbf{u}_m + E_m^*(t) \mathbf{u}_m^*), \quad \mathbf{B}_{re} = \frac{1}{2} \sum_m k_m^{-1} (B_m(t) \nabla \times \mathbf{u}_m + B_m^*(t) \nabla \times \mathbf{u}_m^*) \quad (6)$$

Отметим, что, в отличие от уравнения Шрёдингера, которое является уравнением первого порядка по времени, волновое уравнение (1) второго порядка. Для устранения этого расхождения в схеме квантования Гейзенберга-Дирака исходят из Гамильтонова подхода к классической механике [3]. Последовательная процедура квантования гармонического поля следует этой схеме квантования [4], которая исходит из существования двух канонических (квадратурных) переменных  $p$  и  $q$ , описывающих это поле и связанных соотношением

$$p \sim \frac{\partial}{\partial t} q. \quad (7)$$

В задаче о квантовании ЭМ поля остается решить две проблемы. Найти кандидата на роль импульса и записать гамильтониан для моды.

Учтем, что ЭМ поле имеет поляризацию. В силу поперечности ЭМ полей ( $\text{div } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{H} = 0$ ) можно ограничиться рассмотрением двух поляризаций полей, перпендикулярных волновому вектору. Для упрощения выкладок далее считаем, что ось  $z$  направлена вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ , что позволяет рассматривать две различные поляризации  $\{E_x, B_y, 0\}$  и  $\{B_x, E_y, 0\}$  независимо. В каждом из этих случаев электрическое поле связано с временной производной магнитного поля:

$$-ik\hat{B}_y = \frac{1}{c} \left( \partial \hat{E}_x / \partial t \right), \quad \text{или} \quad \hat{B}_y \sim (i/\omega) \partial \hat{E}_x / \partial t. \quad (8)$$

<sup>1</sup>Отметим, что при переходе к пределу  $L \rightarrow \infty$  мы переходим в (5) от суммирования к интегрированию, вводя плотность состояний мод, которая определяется как число состояний в объеме  $d^3k$ .

Предполагается, что в этих переменных гамильтониан системы может быть выражен суммой двух слагаемых, первое из которых пропорционально  $(p)^2$ , и его можно отождествить с «кинетической энергией», а второе пропорционально  $(q)^2$ , и его можно отождествить с «потенциальной энергией». Иными словами, гамильтониан можно привести к виду гамильтониана гармонических колебаний  $H = p^2 + \omega^2 q^2$ . Далее, следуя процедуре квантования (см. [4, 6]), этим переменным ставятся в соответствие операторы  $\hat{p}$  и  $\hat{q}$ , а их скобка Пуассона  $\{p, q\}$  ставится в соответствие их коммутатор  $i\hbar \{p, q\} \rightarrow [\hat{p}, \hat{q}]$ . Так как для канонических переменных  $\{p, q\} = 1$ , то  $[\hat{p}, \hat{q}] = i\hbar$ .

Из уравнения (8) следует, что компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  связаны соотношением  $k B \sim (1/c) \partial E / \partial t$ , т.е. соотношением (7). Иными словами, эти поля могут претендовать на роль канонических переменных.

Так как граничные условия выполняются для каждой моды, то анализ их поведения можно проводить на примере одной из мод.

Интенсивность (энергия) электрического поля равна [5]

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} E^2 &= \frac{1}{32\pi} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m u_m + \sum_{m'=-\infty}^{\infty} E_{m'}^* u_{m'} \right) \left( \sum_{m''=-\infty}^{\infty} E_{m''} u_{m''} + \sum_{m'''=-\infty}^{\infty} E_{m'''}^* u_{m'''} \right) \\ &= \frac{1}{32\pi} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m u_m \sum_{m''=-\infty}^{\infty} E_{m''} u_{m''} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m u_m \sum_{m'''=-\infty}^{\infty} E_{m'''}^* u_{m'''} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m'=-\infty}^{\infty} E_{m'}^* u_{m'} \sum_{m''=-\infty}^{\infty} E_{m''} u_{m''} + \sum_{m'=-\infty}^{\infty} E_{m'}^* u_{m'} \sum_{m'''=-\infty}^{\infty} E_{m'''}^* u_{m'''} \right) \\ &= \frac{1}{32\pi} \left[ \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m u_m \right)^2 + \left( \sum_{m'=-\infty}^{\infty} E_{m'}^* u_{m'} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m, m''=-\infty}^{\infty} E_m E_{m''} u_m u_{m''} + \sum_{m'=-\infty}^{\infty} E_{m'}^* E_{m'''}^* u_{m'} u_{m'''} \right]. \end{aligned}$$

Тогда гамильтониан принимает вид [1]

$$\begin{aligned} cH &= \frac{1}{16\pi} \int_V (E(t, z) E^*(t, z) + B(t, z) B^*(t, z)) dV \\ &= \frac{1}{16\pi} \sum_{m'm} E_{m'} E_m^* \int_V \mathbf{u}_{m'} \cdot \mathbf{u}_m^* dV + \frac{1}{16\pi} \sum_{m'm} k_m^{-1} k_m^{-1} B_{m'} B_m^* \int_V (\nabla \times \mathbf{u}_{m'}) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_m^*) dV \quad (9) \\ &= \frac{V}{16\pi} \sum_m (E_m E_m^* + B_m B_m^*) = \frac{V}{8\pi} \sum_m H_m. \end{aligned}$$

Итак, мы имеем гамильтониан  $m$ -ой моды:

$$H_m = \frac{V}{8\pi} (E_m E_m^* + B_m B_m^*) = \frac{V}{8\pi} (\hat{E}_m \hat{E}_m^\dagger + \hat{B}_m \hat{B}_m^\dagger). \quad (10)$$

Считая полевые операторы эрмитовыми, имеем:

$$H_m = \frac{V}{8\pi} \left[ (\hat{E}_m)^2 + (\hat{B}_m)^2 \right]. \quad (11)$$

Для квантования ЭМ поля введем эрмитовы операторы полей  $\hat{E}_m$  и  $\hat{B}_m$ . Для моды  $\{E_x, B_y, 0\}$  эти операторы связаны операторным уравнением, являющимся аналогом уравнения Максвелла (8).

Переходя к каноническим переменным

$$\hat{p} = i \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial t} = \omega \hat{B}_y \Rightarrow \hat{B}_y = \hat{p} / \omega, \quad (12)$$

запишем гамильтониан (11) в виде

$$H_m = \frac{V}{8\pi} \left[ (\hat{E}_x)^2 + (\hat{B}_y)^2 \right] = \frac{V}{8\pi \omega^2} (\hat{q}^2 + \hat{p}^2 / \omega^2) = \left( \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{V}{4\pi}} \right)^2 \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2). \quad (13)$$

Далее перейдем к безразмерным переменным

$$\hat{\kappa} = \frac{\sqrt{V/4\pi}}{\omega} \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} \hat{q} = \sqrt{\frac{V/4\pi}{\hbar \omega}} \hat{E}_x \quad (14)$$

$$\hat{\pi} = \frac{\sqrt{V/4\pi}}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}} \hat{p} = \sqrt{\frac{V/4\pi}{\hbar\omega}} B_y, \quad (15)$$

в которых гамильтониан выглядит как гамильтониан квантового линейного осциллятора:

$$H_m = \frac{\hbar\omega V}{2} (\hat{\pi}^2 + \hat{\kappa}^2). \quad (16)$$

В соответствии с методом квантования Гейзенберга-Дирака [4] скобки Пуассона двух переменных  $\{A, B\} = \left( \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial x} \right)$ , где  $x, p$  - канонические координаты, заменяются их коммутатором. Для канонических переменных скобки Пуассона равны единице, а соответствующий коммутатор

$$[\hat{\kappa}, \hat{\pi}] = i\hbar. \quad (17)$$

Введем далее операторы рождения и уничтожения [1]

$$\hat{a} = (\hat{\kappa} + i\hat{\pi})/\sqrt{2} = \sqrt{\frac{V/4\pi}{\hbar\omega}} (\hat{E}_x + i\hat{B}_y), \quad (18)$$

$$\hat{a}^\dagger = (\hat{\kappa} - i\hat{\pi})/\sqrt{2} = \sqrt{\frac{V/4\pi}{\hbar\omega}} (\hat{E}_x - i\hat{B}_y). \quad (19)$$

Окончательно гамильтониан принимает знакомый вид

$$\hat{H}_m = \hbar\omega_m \left( \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \frac{1}{2} \hat{I} \right), \quad (20)$$

а полевые операторы выражаются через операторы рождения и уничтожения как

$$\hat{E}_x = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{V/2\pi}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (21)$$

$$\hat{B}_y = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{V/2\pi}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (22)$$

Аналогичным способом квантуется и вторая мода.

Полевые операторы в общем случае являются суммой по всем возможным волновым векторам и соответствующим поляризациям:

$$\mathbf{E}_{re} = \sum_{m,\alpha} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_m}{V}} (\mathbf{u}_{m,\alpha} \hat{a}_{m,\alpha} + \mathbf{u}_{m,\alpha}^* \hat{a}_{m,\alpha}^\dagger), \quad (23)$$

$$\mathbf{B}_{re} = \sum_{m,\alpha} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_m}{V}} k_m^{-1} (\hat{a}_{m,\alpha}^\dagger \text{curl } \mathbf{u}_{m,\alpha} + \hat{a}_{m,\alpha} \text{curl } \mathbf{u}_{m,\alpha}^*). \quad (24)$$

Величина

$$E_{m0} = \sqrt{2\pi\hbar\omega_m/V} \quad (25)$$

имеет смысл величины электрического поля на один фотон.

Квантование ЭМ в среде представляет собой более трудную задачу. Эти трудности, возникшие еще при классическом рассмотрении ЭМ полей в среде, связаны с тем, что полный гамильтониан невозможно представить в виде суммы гамильтонианов среды и ЭМ поля. Т. о. в присутствии вещества отдельно определенный тензор энергии-импульса ЭМ поля не сохраняется. Только общий тензор энергии-импульса поля и вещества имеет однозначный физический смысл, и то, как его распределять между «электромагнитной» частью и «материальной» частью, зависит от предпочтения исследователя. Так в своих работах Минковский [5] определил плотность импульса световой волны, имеющей плотность энергии  $U$  как  $g = (n/c)U = |\mathbf{D} \times \mathbf{B}| = (n^2/c^2) |\mathbf{E} \times \mathbf{H}|$ , в то время как Абрахам [6] определял ее как  $g = U/(nc) = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}|/c^2$

Несовпадение этих результатов вело к двум различным выражениям для тензора энергии-импульса ЭМ поля. С тех пор было опубликовано множество работ, в которых высказывались аргументы

за ту или другую форму (см. [7] и приведенные там ссылки). В работах Пайерлс показал, что (см. [8]) ни одно из выражений не является правильным. Другими словами, электромагнитная часть и материальная часть в полном импульсе могут быть распределены произвольно, пока импульс остается неизменным.

Наиболее последовательный подход для квантования поля в среде, известный на данный момент, состоит в одновременном квантовании электромагнитного поля и поляризации среды [9]. Однако для реализации такой схемы квантования необходимо задать некоторую модель среды. Одной из самых простых и наиболее часто используемых моделей среды является модель осцилляторов Лоренца. Она предполагает, что среда представляет собой распределённые в пространстве гармонические дипольные осцилляторы. Релаксация среды описывается не феноменологическими константами затухания, а связью резервуара фононов с каждым осциллятором среды. Гамильтониан системы «поле + осцилляторы среды + резервуары» является эрмитовым гамильтонианом взаимодействующих гармонических осцилляторов, квантование которого производится стандартным образом через введение операторов рождения и уничтожения. Собственные моды такой системы представляют собой коллективные колебания поля и среды, которые можно получить с помощью процедуры Фано диагонализации [10]. Однако, поскольку собственные колебания представляют собой связанные колебания поля и среды (поляритоны), при таком подходе трудно выделить именно колебания поля [11].

В статическом (квазистатическом) случае поля подчиняются не уравнениям Максвелла, а уравнениям Пуассона, что усугубляет проблему квантования плазменных колебаний, локализованных на наночастице. Как известно [12, 13], статические поля, подчиняющиеся уравнению Пуассона, являются классическими и не квантуются. Электрическое и магнитное поля подчиняются различным, не связанным между собой уравнениям. Квазистатическое электрическое поле вместо уравнения (1) подчиняется уравнению  $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0$ . Таким образом, использовать магнитное поле как каноническую переменную уже не удастся.

Все сказанное выше отчасти справедливо и для квазистатических полей. Задача о нахождении электрического и магнитного полей, как и в случае статики, разделяется на две независимые задачи, и применение уравнения (12) малоэффективно.

Для любой компоненты  $q$  ЭМ поля трудно подобрать физическую величину, способную играть роль ее кинетической энергии. Это связано с тем, что в случае квазистатики хотя поля и зависят от времени, но, так квазистатика предполагает, что длина волны много больше размера системы, то временные производные много меньше пространственных, так как первые определяются частотой (т.е. длиной волны), а вторые - размером включения. Пренебрегая временными производными, мы приходим к уравнениям статики. В частности, мал вклад в рассматриваемые электрические явления индуцированного магнитного поля. Как следствие, отсутствуют собственные решения в задаче о возбуждении частиц субволнового размера. Т.е. такие решения, что при нулевом внешнем поле существуют колебания. Единственное исключение – это случай отрицательной диэлектрической проницаемости. В этом случае существуют значения диэлектрической проницаемости, когда на определенной частоте отклик на внешнее поле может иметь полюс [14], и колебания (резонанс) возникают независимо от размера системы. Такие вещества называют плазмоподобными.

Ниже под плазмой мы понимаем систему электронов и ионов. Для простоты мы будем использовать приближение свободных электронов, т.е. считать, что в силу большой разности масс электронов и ионов последние считаются покоящимися, а электроны двигаются, находясь в среднем электрическом поле, созданным зарядами обоих знаков. Обычно рассматривают квазинейтральную плазму, т.е. считают, что средние плотности положительных и отрицательных зарядов совпадают и среднее электрическое поле равно нулю. Под действием внешнего электрического поля электроны начинают направленное по полю движение, упруго рассеиваясь на ионах, что приводит к конечной мнимой части диэлектрической проницаемости (электропроводности).

В простейшем виде теория диэлектрической проницаемости была развита Друде [15, 16]. В рамках этой теории существуют частоты, когда действительная часть становится отрицательной. Ленгмюр показал, что в такой системе даже при отсутствии внешнего поля при нулевом значении диэлектрической проницаемости возможно возникновение долгоживущих флуктуаций, связанных с локальным разделением зарядов и, по существу, представляющих собой продольные коллективные колебания электронов. Для описания таких флуктуаций Ленгмюром был введен термин «плазмон» [17]. Таким образом, в системе без внешнего поля могут быть заряды и токи, связанные уравнением сохранения заряда, имеющего вид  $\partial e / \partial t = \nabla \cdot \mathbf{j}$ , что напоминает соотношение (7) и вселяет надежду на возможность квантования. Появляется возможно вместо уравнений Максвелла квантовать уравнение Ньютона, как, собственно, поступают при квантовании гармонического осциллятора.

Итак, предположим, что в некоторый момент времени возникает небольшая сферическая флуктуация в распределении заряда. Пусть внутри объема этой флуктуации электроны самопроизвольно

сместились в одном направлении на некоторое расстояние  $x$ , и на поверхности сферы образовался поверхностный заряд  $(en) x \cos \varphi$ . Такое распределение поверхностных зарядов эквивалентно распределению поверхностных зарядов на диэлектрическом шаре с однородной поляризацией  $P = enx$  [18]. Как известно [18], электрическое поле  $E$  внутри такой вспомогательной сферы равно  $-4\pi P/3$ . Учитывая, что  $P = nex = nd$ , где  $d$  – дипольный момент молекулы, из которой состоит вспомогательная диэлектрическая сфера, получаем, что  $d = nex$  и уравнение Ньютона для движения электрона  $\ddot{x} = eE/m_e$  можно переписать в виде  $\frac{d^2x}{dt^2} = e^2 \left( -4\pi \frac{P}{3m_e} \right)$

$$\frac{d^2 d_{pl}}{dt^2} = \frac{4\pi e^2 n}{3m_e} d_{pl} \quad (26)$$

Согласно этому уравнению дипольный момент будет совершать гармонические колебания с частотой  $\omega_{pl} = \sqrt{4\pi e^2 n/3m}$ . Этому движению соответствует гамильтониан

$$H = \frac{(d(d_{pl})/dt)^2}{2} + \frac{\omega_{pl}^2 d_{pl}^2}{2}.$$

Очевидно, что этот дипольный момент равен среднему дипольному электрическому моменту флуктуации. Именно движение этого дипольного момента мы и будем квантовать. Для этого введем так называемые квадратурные операторы  $\hat{Q}_m = \hat{d}_{pl}$  и  $\hat{P}_m = d(\hat{d}_{pl})/dt$ . Коммутационное соотношение можно получить, переходя от уравнений Ньютона к уравнениям Гамильтона-Якоби [3]. Получающиеся при этом скобки Пуассона, согласно Дираку и заменяются коммутатором  $[\hat{d}_{pl}, d(\hat{d}_{pl})/dt] = i\hbar$  [4]. Гамильтониан же примет вид гамильтониана квантового гармонического осциллятора  $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{\omega_{pl}^2 \hat{Q}^2}{2}$ .

Откуда получаем канонические переменные  $\hat{q} = \sqrt{\frac{\omega_{pl}}{\hbar}} \hat{d}_{pl}$  и  $\hat{p} = \sqrt{\frac{1}{\hbar \omega_{pl}}} \hat{d}_{pl}$ , подчиняющиеся, по определению, коммутационному соотношению  $[\hat{q}, \hat{p}] = i$ . На основании этого можно ввести операторы рождения и уничтожения

$$\hat{a}_d^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_d = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad (27)$$

и получить гамильтониан в виде

$$H = \frac{\hbar \omega_{pl}}{2} (\hat{p}^2 + \hat{q}^2) = \hbar \omega_{pl} \left( \hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d + 1/2 \right). \quad (28)$$

Чтобы закончить процедуру квантования плазмона, мы должны приравнять энергию дипольного момента  $\mathbf{d}_{pl}$  к энергии плазмона  $\hbar \omega_{pl}$ . Чтобы найти эту энергию, мы можем найти электрическое поле, создаваемое этим диполем, и приравнять энергию этого электрического поля к энергии одного кванта. Дипольный момент однозначно определяет электрическое поле внутри и снаружи наночастицы.

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\mathbf{d}_{pl}/a^3, & r < a \\ \left( 3(\mathbf{n}\mathbf{d}_{pl})\mathbf{n} - \mathbf{d}_{pl} \right)/r^3, & r > a \end{cases} \quad (29)$$

Энергию этого поля необходимо приравнять к энергии одного кванта

$$\begin{aligned} \hbar \omega_{pl} &= \frac{1}{8\pi} \int_V d^3\mathbf{r} \left( \varepsilon_m(\omega) + \frac{\partial \varepsilon_m(\omega)}{\partial \omega} \right) |\mathbf{E}_d(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial(\varepsilon_m(\omega))}{\partial \omega} \int_{V_{in}} d^3\mathbf{r} |\mathbf{E}_d(\mathbf{r})|^2 \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int_{V_{in}} d^3\mathbf{r} \varepsilon_m \partial(\omega) |\mathbf{E}_d(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{8\pi} \int_{V_{out}} d^3\mathbf{r} \varepsilon_{out}(\omega) |\mathbf{E}_d(\mathbf{r})|^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Принимая во внимание, что  $\mathbf{E}_d^*(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi_d^*$ ,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8\pi} \int_{V_{in}} d^3\mathbf{r} \varepsilon_{in}(\omega) \mathbf{E}_d(\mathbf{r}) (-\nabla \varphi_d^*) + \frac{1}{8\pi} \int_{V_{out}} d^3\mathbf{r} \varepsilon_{out}(\omega) \mathbf{E}_d(\mathbf{r}) (-\nabla \varphi_d^*) = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{V_{in}} d^3\mathbf{r} \nabla(\varepsilon_{in}(\omega) \mathbf{E}_d(\mathbf{r})) \varphi_d^* + \frac{1}{8\pi} \int_{V_{out}} d^3\mathbf{r} \nabla(\varepsilon_{out}(\omega) \mathbf{E}_d(\mathbf{r})) \varphi_d^* - \\ &- \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} d\Omega a^2 \varphi_d^* (\mathbf{n}\mathbf{E}_{d,in}(\mathbf{r}) \varepsilon_{in}(\omega) - \mathbf{n}\mathbf{E}_{d,out}(\mathbf{r}) \varepsilon_{out}(\omega)) = 0, \end{aligned}$$

последние два слагаемых в правой части (30) равны нулю, и мы получаем

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial(\varepsilon_{in}(\omega))}{\partial \omega} \int_{V_{in}} d^3\mathbf{r} |\mathbf{E}_d(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{2(\omega_{pl}^0)^2}{\omega_{pl}^2} \frac{\mathbf{d}_{pl}^2}{a^6} \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{\mathbf{d}_{pl}^2}{a^3}. \quad (31)$$



При получении последней оценки мы не учитывающей поглощения в металле и использовали теорию Друде для диэлектрической проницаемости металла [15]

$$\varepsilon_m(\omega) = 1 - \frac{(\omega_{pl}^0)^2}{\omega^2}, \quad (32)$$

что, учитывая (30), дает величину дипольного момента на один квант, равную

$$d_q = \sqrt{\hbar\omega_{pl}a^3} = \sqrt{3\hbar\omega_{pl}V/4\pi}, \quad (33)$$

или окончательно

$$\hat{\mathbf{d}}_{pl} = \mathbf{d}_q (\hat{a}_d^\dagger + \hat{a}_d). \quad (34)$$

## Список литературы

- [1] L. E. Ballentine, Quantum Mechanics (A Modern Development) World Scientific Publishing. - 1998. - 658 с.
- [2] Н. Л. Кудрявцев, Курс математического анализа. - М.: Юрайт. 2012. - 352 с.
- [3] Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике. - М.: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы. - 1966. - 300 с.
- [4] П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики / Библиотека теоретической физики. - М.: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы. - 1979. - 479 с.
- [5] Minkowski, H., Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, p. 53; Minkowski, H. 1910 Math. Annln 68, 472, 1908.
- [6] Abmham, M. Rc. Circ. Mat. Palermo 28, p.1; Abraham, M. 1910 Rc. Circ. Mat. Palermo 30, p.33, 1909.
- [7] В. Л. Гинзбург, В. А. Угаров, УФН 118, 175. - 1976.
- [8] R.E. Peieres, Proc. R. Soc. Lond. A. 347, 475-491 (1976), Proc. R. Soc. Lond. A. 355, 141-151. - 1977.
- [9] B. Huttner and S. M. Barnett, Physical Review A 46, 4306 (1992), T. G. Philbin, New Journal of Physics 14, 083043. - 2012.
- [10] T. G. Philbin, New J. Phys. 14, 083043. - 2012; T. G. Philbin, New J. Phys. 12, 123008. - 2010.
- [11] Shishkov, V. Y., Andrianov, E. S., Pukhov, A. A., & Vinogradov, A. P. Hermitian description of localized plasmons in dispersive dissipative subwavelength spherical nanostructures. Phys. Rev. B, 94(23), 235443, (2016).
- [12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика в десяти томах / т. 2 . Теория поля. М.: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы. - 1988. - Т. 8. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука. - 1992.
- [13] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков Квантовые поля. - М. «НАУКА», Главная редакция физико-математической литературы. - 1980. - 319 с.
- [14] D. J. Bergman, Physics Reports 43, 377, 1978.
- [15] В. Браун Диэлектрики. - Москва. ИЛ. - 1961. - 324 с.
- [16] Борн М. Оптика. - Киев: ОНТИ НКТП. - 1937. - 796.
- [17] L. Tonsk, I. Langmuir Phys Rev 33, 195, 1929).
- [18] И. Е. Тамм, Основы электричества. - М.: ФИЗМАТЛИТ. - 2003. - 193 с.

## PLASMON QUANTIZATION

Andrianov E.S.<sup>1\*</sup>, Vinogradov A.P.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics of RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Moscow institutes of physics and technology, Moscow region, Russia

\* a-vinogr@yandex.ru

### Abstract

The algorithm of local plasmon quantization is discussed.

**Key words:** plasmon, quantization of quasi-static fields

---